6° PREMIO NAZIONALE "CESARE CANCELLIERI"

Sezione A: *Didattica della matematica*

Su con il Cappello

Diana Cipressi

Ma che cappello mi prende?
Il cappellaio matto

IDEAZIONE

Nella tradizione antica del Carnevale abruzzese, un protagonista è "*Lu pucinelle*". Il Pulcinella abruzzese è una figura magica che indossa un abito di tradizione di colore bianco con molti abbellimenti e un cappello di forma conica alto 70-100 cm, arricchito da pon pon in lana, che rappresentano fiori, e da nastri colorati, che simboleggiano nuovi germogli.

Il Carnevale è una grande festa che consacra il ritorno della Primavera dove Pulcinella con il suo cappellone si mostra uomo semplice capace di risolvere i problemi più disparati.
Il cappello di Pulcinella, per via delle sue notevoli dimensioni e della varietà dei colori, desta una naturale curiosità nei miei giovani alunni, e si chiedono: *Riesce Pulcinella a reggere il suo cappello*

senza farlo cadere? Come fa a costruire un cappello così grande? Che tipo di figura ha disegnato per crearlo? Da qui è nata, con gli alunni della mia classe seconda, l'idea di costruire concretamente un cappello a punta.

Le Indicazioni Nazionali per la scuola dell'Infanzia e del primo Ciclo 2012 forniscono una linea di riferimento: "*La costruzione del pensiero matematico è un <u>processo lungo e progressivo</u> nel quale concetti, abilità, competenze e atteggiamenti vengono ritrovati, intrecciati, consolidati e sviluppati a più riprese; è un processo che comporta anche difficoltà linguistiche e che richiede un'acquisizione graduale del linguaggio matematico. Caratteristica della pratica matematica è la risoluzione di problemi, che devono essere intesi come <u>questioni autentiche e significative</u>, legate alla vita quotidiana*"

Dunque il "*fare matematica*" deve prevedere una cura specifica delle pratiche didattiche nello sviluppare situazioni problematiche e nel valorizzare l'acquisizione progressiva di competenze matematiche, mettendo in evidenza con processi iterativi la narrazione di fatti e azioni e l'argomentazione di idee concatenate.

A tal fine il laboratorio "***Su con il cappello***" - realizzato nell'a.s. 2018-19 con la classe 2B della scuola sec. di 1° grado "*G. Mezzanotte*" di Chieti – rappresenta una sperimentazione didattica che ha richiesto uno sforzo di riflessione sul curricolo di matematica nell'ottica di una verticalità e un ripensamento continuo sugli oggetti culturali fondanti, sui nodi concettuali e sugli ostacoli cognitivi dell'apprendimento.
Lo spunto per il presente laboratorio didattico è offerto da un problema presentato dal corso di formazione per insegnanti *MathUp* (Cfr. https://www.problemi.xyz/wp-content/uploads/2018/07/014-testo.pdf) il cui protagonista è proprio un cappello a forma conica.
Le attività qui presentate cercano di favorire una geometria ricca di esperienze spaziali relative ad una figura inconsueta per la classe seconda, come il *cono*, coniugata al rigore dell'impianto epistemologico della disciplina, attinente a modelli ricavati dal contesto quotidiano, come il *cappello*.

Il video "Su il cappello" estratto da https://www.youtube.com/watch?v=LQpDBg6ymZU&t=39s documenta le tappe più significative della pratica laboratoriale messa in atto nella classe 2B.

Il percorso laboratoriale è articolato nei seguenti moduli

1. *Effetto sorpresa*
2. *Il cono e la conoscenza*
3. *La terna pitagorica*
4. *Il settore circolare*
5. *La misura dei coni*
6. *La riflessione sulle procedure di misurazione*
7. *I numeri decimali*
8. *Cappelli per tutti i gusti*
9. *Per tentativi*
10. *Qualcosa non è chiaro*
11. *La festa e i premi*

Una foto di classe, come ricordo di un momento dell'anno, laborioso ma molto divertente, mostra il gruppo di 26 "simpaticoni" ognuno con un cappello di cartone, l'oggetto protagonista dell'esperienza di apprendimento.

OBIETTIVI E COMPETENZE

Competenze

L'alunno deve

- Rafforzare un atteggiamento positivo rispetto alla matematica attraverso esperienze significative e capire come gli strumenti matematici appresi siano utili in molte situazioni per operare nella realtà.
- Riconoscere e risolvere problemi in contesti diversi valutando le informazioni e la loro coerenza.
- Spiegare il procedimento seguito, anche in forma scritta, mantenendo il controllo sia sul processo risolutivo, sia sui risultati.

Obiettivi di apprendimento
L'alunno deve

- Effettuare misure dirette di grandezze attraverso strumenti
- Interpretare i risultati delle misure
- Visualizzare una figura solida a partire dallo sviluppo piano e viceversa
- Descrivere figure complesse e costruzioni geometriche al fine di comunicarle ad altri
- Risolvere problemi utilizzando le proprietà geometriche delle figure
- Giustificare affermazioni e congetture durante una discussione matematica

CONCETTI CHIAVE E NUCLEI TEMATICI

Il progetto *Su con il cappello* verte sui seguenti nuclei fondanti:

a) Numero:
operazioni con i numeri decimali

b) Forme del piano e dello spazio:
elementi del triangolo isoscele e del triangolo rettangolo
terna pitagorica
elementi della circonferenza e del cerchio
elementi del cono

c) Misura di grandezze:
uso degli strumenti (riga, squadra, goniometro, compasso)
misurazioni di lunghezze e angoli
errori di misura; approssimazioni; media aritmetica

d) Relazioni e funzioni:
uguale a, diverso a
tabelle per rappresentare dati
relazioni numeriche o spaziali

METODOLOGIA

Il **Project Based Learning** è l'approccio che ha incentrato l'alunno attorno ad un compito complesso che lo ha coinvolto nella progettazione e nella risoluzione di un problema (la costruzione di una figura solida), per un periodo piuttosto lungo di tempo (14 ore distribuite in due mesi).
Ogni alunno ha lavorato in piccoli gruppi, acquisendo man mano autonomia e atteggiamenti corresponsabili, e sviluppando competenze nella realizzazione di un prodotto autentico, il cappello; ha preso parte alle attività programmate rivolte a compiti individuali o cooperativi, con l'ausilio di strumenti tecnici e di schede di autoriflessione.

La **Didattica laboratoriale** ha valorizzato la competenza "*imparare ad imparare*"; l'alunno, protagonista delle proprie azioni, ha riflettuto sul superamento delle difficoltà e degli ostacoli, organizzando l'esplorazione del compito di realtà con strumenti di misura (righello e goniometro) e con materiale di facile consumo (cartoncino, forbici, …).

L’approccio **Learning by doing** ha promosso lo sviluppo di capacità che mettono in relazione il “*fare*” e il “*pensare*”, per mezzo della costruzione-misurazione dei cappelli e della visualizzazione dell’oggetto matematico, quale il cono. La percezione realistica del problema ha favorito senz’altro la familiarizzazione con la geometria e una contestualizzazione del processo formativo.

La **Didattica metacognitiva** ha coinvolto gli alunni della 2B in una riflessione sull’*errore*, come stimolo per trovare altre strade, che ha incoraggiato sia una continua verbalizzazione di idee e proposte, giuste o sbagliate, sia la forza e la ricchezza della collettività con spirito di interdipendenza. Il ruolo positivo dell’errore ha restituito con processi graduali di aggiustamento un’occasione significativa di apprendimento e un’opportunità di crescita.
Il progetto educativo a tal fine ha dedicato uno spazio opportuno alla **discussione matematica**: nella revisione di gruppo gli alunni hanno confrontato le idee e le proposte individuali o collettive, hanno verificato concetti, strategie e soluzioni, e hanno monitorato i progressi compiuti del loro lavoro nella condivisione tra gruppi. Gli alunni meno attivi all’interno del gruppo man mano hanno imparato a gestire il proprio disagio e a collaborare secondo le proprie capacità.

L’elaborazione condivisa di un piano d’azione, l’ascolto attivo e una buona comunicazione, il rispetto dell’opinione dell’altro, il sostegno delle proprie convinzioni e la riformulazione dei propri pensieri hanno portato al raggiungimento di un obiettivo comune.

VALUTAZIONE

In un ambiente di apprendimento laboratoriale, l’alunno deve fronteggiare un compito di realtà, mettendo alla prova conoscenze e abilità in processi nuovi e complessi, manifestando la capacità di riflettere su un problema di vita reale, imparando a controllare i progressi della propria crescita.
Una valutazione *autentica* quindi deve prevedere su un periodo medio-lungo una visione complessiva del processo di apprendimento e una misura dell’efficacia dell’insegnamento.
Gli strumenti di valutazione sono stati:

- Schede per lavori individuali
- Schede per attività di gruppo
- Monitoraggio della partecipazione nei gruppi di lavoro
- Monitoraggio della discussione matematica

La valutazione ha tenuto conto della partecipazione attiva e costante, del lavoro di squadra e del contributo di idee creative.
I criteri di valutazioni sono stati: la cura, la correttezza e la completezza dei prodotti realizzati; la creatività nelle costruzioni e nelle presentazioni; lo spirito di iniziativa.

MODULO 1: EFFETTO SORPRESA

Per accrescere la motivazione e le aspettative verso il problema del cappello e favorire un clima di coinvolgimento nella classe, ho pensato di creare la simulazione di un contesto di apprendimento.
Ho recuperato una scatola di panettone a base quadrata, ho costruito e decorato un cappello conico che fosse contenuto esattamente dentro la scatola e ho infiocchettato la scatola a mo' di pacchetto regalo.
La mattina ho preso accordi con Ignazio, il bidello, per introdurre il pacco in classe; nel bel mezzo della lezione, lui è entrato con il pacco dicendo "*Professoressa, è arrivato da Milano un pacco per la classe 2B*". L'aula è stata subito avvolta da un'atmosfera magica e da un silenzio stupefacente. Seduta in cattedra, mentre agitavo la scatola per percepirne il peso del contenuto, gli alunni puntavano gli occhi sorpresi dalle loro postazioni verso il pacco enigmatico.

Su con il cappello

Ho letto la lettera posta sul pacco che annunciava la festa di compleanno dell'amico Giuliano e del bellissimo premio in palio per i vincitori della gara che si sarebbe svolta durante la sua festa.
La classe senza indugio ha manifestato i primi pensieri "*Che cosa si vince*?" e "*Chi apre il pacco*?"
Dopo qualche secondo, tutta la classe era accanto alla cattedra, e un cerchio disordinato di ragazzi attorno alla scatola palesava una vivace curiosità: un alunno ha sciolto il nodo del fiocco, uno ha sollevato lentamente il coperchio, uno ha estratto il cappello passandolo ai compagni di mano in mano. Dalla busta in fondo al pacco infine è spiccato il problema da risolvere:

Giuliano vi ha invitato alla sua festa di compleanno,
con la condizione che dovete venire con un cappello a forma di cono,
proprio come quelli dei gelati, ma capovolto, con la punta in su.
Giuliano (che è un po' strano…!) vi ha chiesto che il cappello sia proprio delle stesse misure di quello che avrà lui e, per rendervi il compito più difficile, non vi dice le misure del suo cono-cappello, ma vi dice soltanto che ci sta (giusto giusto) in una scatola a base quadrata, con il lato del quadrato di 20 cm e l'altezza di 24 cm.

La giornata è finita così, con un quarto d'ora- ventini minuti in cui l'emozione ha lasciato spazio all'attesa del compito da svolgere. La fase di avvio del progetto è stata così attivata: la meraviglia generata dal pacco ha incoraggiato la curiosità nell'affrontare un compito complesso, il premio in palio ha riconosciuto gli sforzi da sostenere, l'attesa dell'esito della gara ha rafforzato la gratificazione al successo formativo.

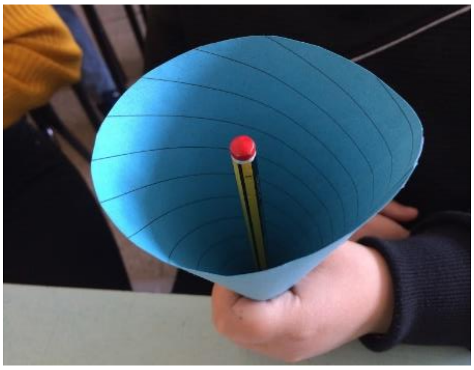
MODULO 2: IL CONO E LA CONOSCENZA

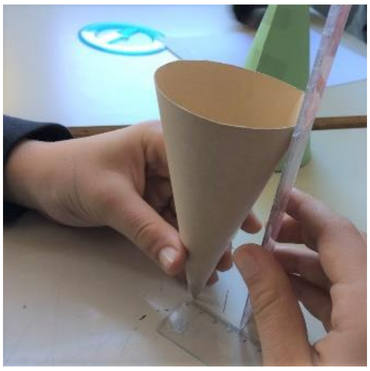
Il pacco-sorpresa ha messo in scena la premessa per la costruzione del cappello di Giuliano, con le misure convenute per la sua festa di compleanno, ed ha suggerito le prime osservazioni:

- *il cappello dentro la scatola ha la stessa altezza del contenitore;*
- *la base del cappello tocca i quattro lati del fondo della scatola*
- *il cappello di Giuliano è più alto di quello pervenuto in classe*.

L'alunno, posto al centro dell'azione educativa, ha assunto un ruolo attivo già nelle prime fasi della sperimentazione; dopo una breve lezione di conoscenza della circonferenza e del cerchio, ogni studente inizia ad osservare e maneggiare, insieme ai compagni, una serie di modelli a forma conica, a studiarne le caratteristiche, a sperimentare con mano i concetti geometrici legati al cono, aiutandosi con strumenti di vario genere e adottando prospettive personali e differenziate.

- Davide mostra il *centro* della base del cono con la punta di una matita inserita nel *vertice* del cono.
- Sofia appoggia un goniometro all'interno del cono e individua un *diametro* con il righello passante per il centro del goniometro.
- Mattia visualizza l'*altezza* del cono con un righello, posto esternamente al cono e parallelamente all'altezza.



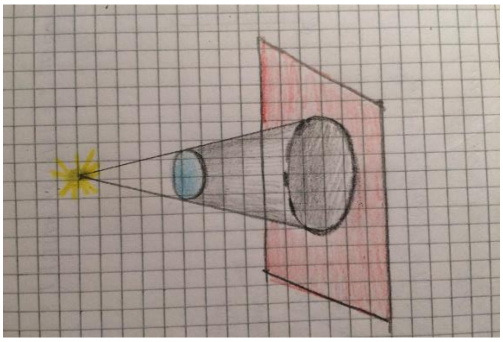


Cogliamo l'occasione per riconoscere la figura del cono presente in contesti di vario genere, ad esempio un cappello di paglia, un cono gelato, una patella attaccata agli scogli, una pigna di conifera, ecc….

E in particolare nell'ambito delle scienze focalizziamo un effetto della luce:

Una torcia e un coperchio di un barattolo sono gli strumenti che visualizzano un *cono d'ombra;*
la zona d'ombra è proiettata dal corpo illuminato dalla torcia sul lato opposto alla sorgente stessa.

Il cono d'ombra aiuta la classe a "vedere" i concetti:
- *Il cono è tagliato in due parti, quella più scura è il cono d'ombra;*
- *La torcia rappresenta il vertice del cono;*
- *L'ombra proiettata sul muro ha una forma circolare ed è la base del cono;*
- *La distanza tra la torcia e la parete è l'altezza del cono.*

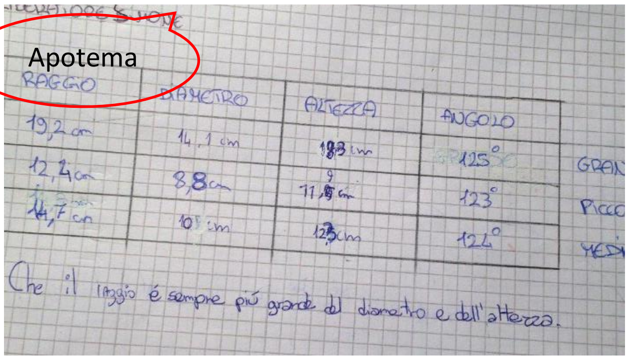


I ragazzi discutono infine possibili varianti:
- *la forma dell'ombra è circolare se il tappo è parallelo alla parete;*
- *la forma dell'ombra non cambia se usiamo una pallina invece di un tappo;*
- *aumentando/diminuendo l'altezza del cono, cioè la distanza torcia-parete, il raggio dell'ombra diventa più piccolo/più grande.*

Essi trovano dunque i primi elementi che caratterizzano una conoscenza di base del cono, esprimendone i significati attraverso un'esperienza concreta.

MODULO 3: LA TERNA PITAGORICA (raggio, altezza e apotema)

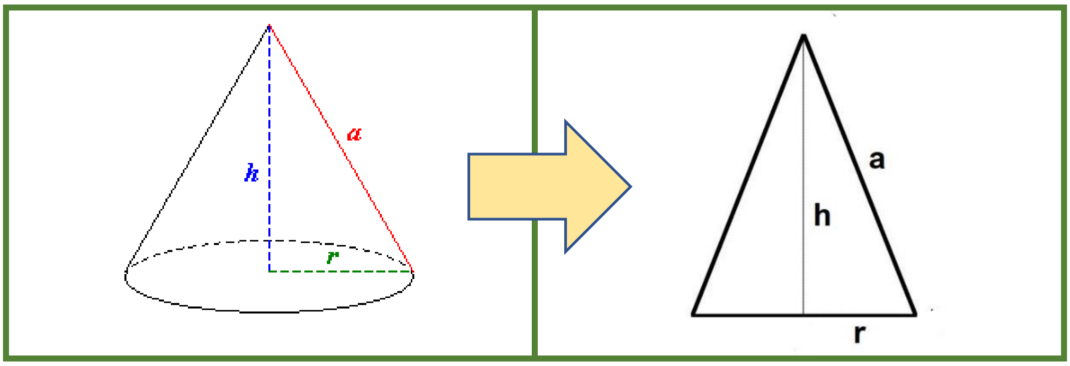
Dopo aver descritto le caratteristiche geometriche del cono, gli alunni possono eseguire le misure su una serie di coni di cartoncino, registrando per ciascuno di essi le lunghezze dell'apotema (o raggio del settore, del diametro di base e dell'altezza del cono.
Dal confronto dei dati raccolti dai gruppi di lavoro, si osserva che l'apotema è sempre maggiore dell'altezza, ma non sempre del diametro.



Si tratta ora di costruire una relazione tra apotema, altezza, e raggio di base, senza conoscere il Teorema di Pitagora.

Una idea originale è suggerita da Martina con la costruzione di una sezione piana del cono, motivando la sua opera dicendo "*perché mi sembrava di vederlo dentro il cono*": il modello di Martina è quello di un triangolo isoscele assemblato in "verticale", avente per base una strisciolina di carta al posto del diametro del cono e per altezza una striscia perpendicolare incollata nella metà dell'altra, completando con un filo di lana - di un gomitolo di cui disponiamo sempre - per il lato obliquo.
La classe condivide il modello di Martina, riconosce gli elementi che caratterizzano il cono visto dall'interno e esprime le proprietà del triangolo isoscele: i lati obliqui sono uguali, l'altezza è anche mediana, l'altezza divide il triangolo isoscele in due triangoli rettangoli congruenti.

È questo un passaggio fondamentale che ha consentito agli alunni di cambiare prospettiva: osservare in modo diverso una figura solida (il cono) ed riconoscere in una sezione piana una figura (il triangolo isoscele).

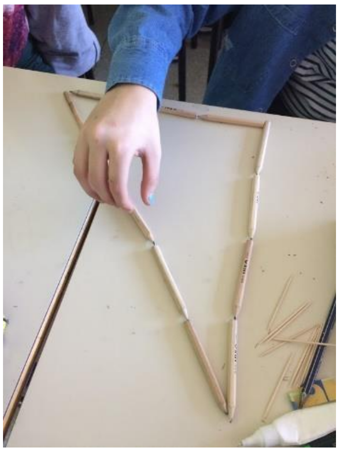
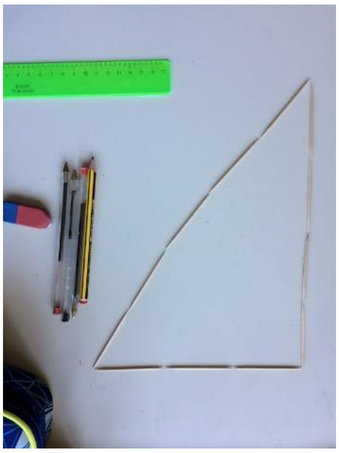


Focalizziamo ora l'attenzione su uno dei triangoli rettangoli, i cui lati sono raggio di base, altezza e apotema del cono.
Per introdurre la terna pitagorica 3, 4 e 5, ogni gruppo costruisce triangoli rettangoli usando come unità di misura un listello di legno, oppure una matita, o uno stuzzicadenti …:

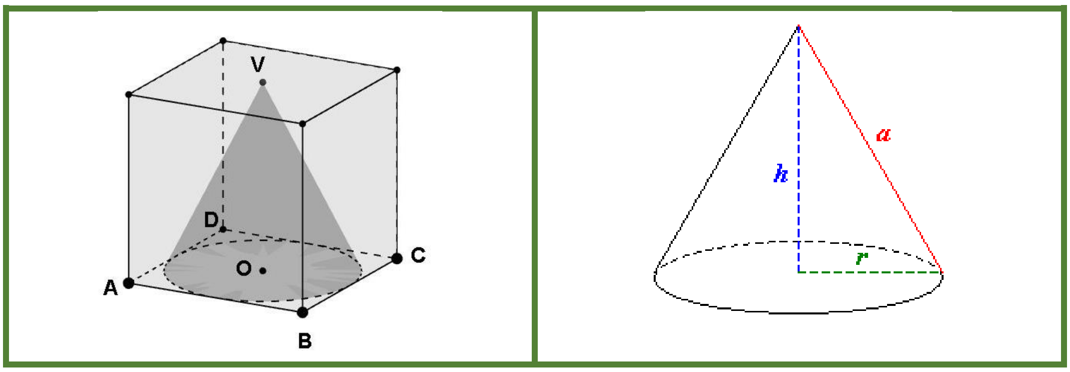
- "*Se i cateti misurano 3 e 4 unità, quanto misura l'ipotenusa*?"

Provando e riprovando, gli alunni verificano che l'ipotenusa dei triangoli rettangoli con cateti 3 e 4 unità è sempre 5 unità.

- *Diciamo che i numeri 3, 4 e 5 formano una terna pitagorica.*

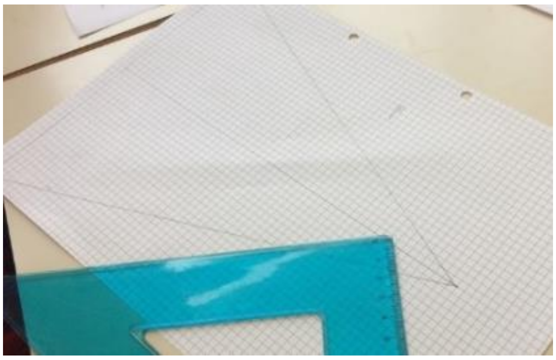

La classe è pronta per individuare l'apotema del cono.



- *se la scatola è alta 24 cm, allora il cono è alto 24 cm;*
- *se il lato della base quadrata misura 20 cm, allora il diametro di base del cono è 20 cm e il raggio è 10 cm;*
- *l'apotema è l'ipotenusa di un triangolo rettangolo.*

Per trovare la misura dell'apotema del cono-cappello, gli alunni procedono in più modi:

- alcuni gruppi riproducono su un foglio un triangolo isoscele di altezza 24 cm e base 20 cm e misurano con il righello la lunghezza del lato obliquo; i dati raccolti, pur presentando qualche lieve incertezza dovuta al metodo di misurazione, consentono di stabilire che l'ipotenusa è lunga 26 cm.



- Ascanio invece realizza una riduzione in scala con bastoncini di legno, cioè un triangolo rettangolo di cateti 12 e 5 unità e ipotenusa 13 unità; raddoppiando questi numeri ottiene le misure del trangolo contenuto nel cono:
  12 x 2 cm = 24 cm; 5 x 2 cm= 10 cm; 13 x 2 cm = 26 cm.

Possiamo dunque concludere che il cono-cappello di Giuliano avrà il diametro di 20 cm, l'altezza di 24 cm e l'apotema di 26 cm.
Costruire il cono però richiederà la ricerca di un altro elemento da scoprire, l'ampiezza dell'angolo del settore circolare, come vedremo nei moduli successivi.

MODULO 4: IL SETTORE CIRCOLARE

Siamo ad un punto cruciale del processo di apprendimento, quello che dovrà trasportare il pensiero di ogni alunno dalla struttura di un solido verso la rappresentazione di una superficie piana, ossia lo sviluppo di un cono. Cercheremo poi di tirare le fila della questione con una discussione di classe, in cui gli alunni spiegheranno e motiveranno quanto svolto.

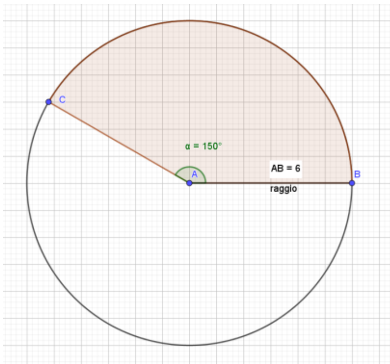
La definizione di settore circolare

Ogni gruppo ha a disposizioni una serie di cappellini di carta, da smontare e da osservare.

Matteo per esempio ha subito notato che il cono aperto genera una specie di triangolo isoscele, "*perché ha due lati uguali*".

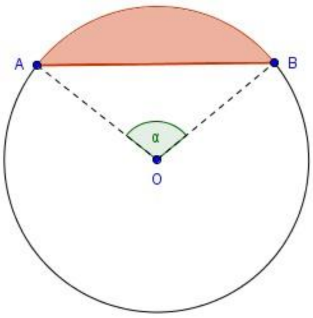
Non è un triangolo isoscele, ma un "*settore circolare*"; dalla discussione di classe, dove ognuno contribuisce con proprie osservazioni, si arriva ad una definizione condivisa di settore circolare:

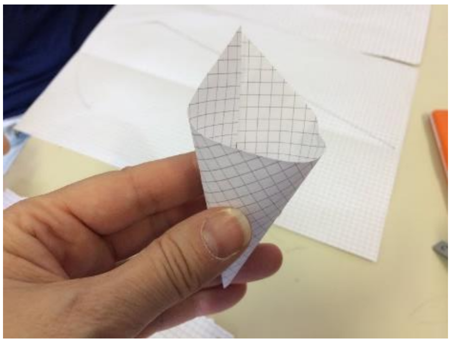
- *Una figura piana racchiusa da due segmenti uguali e una linea curva*
- *Uno spicchio di cerchio il cui contorno è dato da due segmenti consecutivi uguali e un arco.*
- *Una parte di cerchio racchiusa da due raggi e un arco.*
- *Una parte di cerchio delimitata da un arco e dai raggi che hanno un estremo negli estremi dell'arco della circonferenza.*



Le relazioni tra il cono e il suo sviluppo piano

- Jacopo mormora "*Nel settore non vedo più il diametro del cappello*" e una sua compagna gli suggerisce di tracciare con la riga la "*base del settore circolare*" identificando la corda del settore con il diametro del cono, ma non tutti sono d'accordo. In effetti un triangolo isoscele arrotolato non dà origine ad una forma conica, ma ad un di cartoccio per patatine!





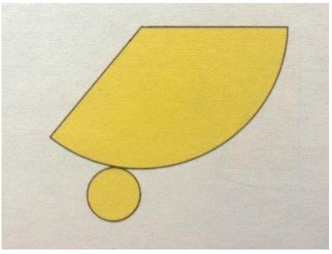
- L'*altezza del cono*, secondo Sara, deve essere anche la bisettrice del settore circolare! In pratica, Sara maneggiando il cono, tende a schiacciarlo facendolo diventare una figura piatta e immagina di "vedere" l'altezza del cono sovrapposta ad un segmento che divide a metà il cono appiattito. Ipotizza che l'altezza del cono sia anche una bisettrice, confondendo il settore circolare, il cono schiacciato e la sezione triangolare del cono.
  Il gruppo di Sara fatica a concatenare i ragionamenti: "*questo problema è molto difficile*".
  Qualcuno si fa avanti, ricordando che l'altezza *h* del cono è sempre minore dell'apotema e che tutti i segmenti uscenti dal vertice del settore sono uguali all'apotema: dunque la bisettrice del settore non può essere anche l'altezza del cono.

Dalla discussione emerge un'altra possibilità: l'altezza *h* del cono potrebbe essere il segmento *VH* di perpendicolare che unisce il vertice del settore circolare con la corda avente gli estremi negli estremi dell'arco della circonferenza. Qualcuno però osserva che anche questo tentativo è errato, constatando che le misure di *h* e *VH* eseguite rispettivamente sul cono chiuso e sullo sviluppo piano non coincidono.

- La *base del cono* ha la forma di cerchio posto su un piano *perpendicolare all'altezza*; ad esempio si può osservare che il cono d'ombra generato da una torcia, posta obliquamente ad una parete, non proietta un cerchio ma un ovale.
  Proviamo infine ad avvicinare/allontanare la torcia al/dal tappo e osserviamo sulla parete che le dimensioni della base del cono d'ombra variano; il cerchio si fa più piccolo o più grande se l'altezza del cono d'ombra aumenta o diminuisce.
  L'esperimento della torcia costituisce un rinforzo positivo all'apprendimento, favorendo la visualizzazione della perpendicolarità tra altezza e base del cono.

- Aprendo e chiudendo più volte i coni, gli alunni iniziano ad intuire una relazione tra il *cerchio base del cono* e *l'arco del settore circolare*: la lunghezza della parte curva è uguale alla lunghezza della circonferenza di base del cono-cappello.

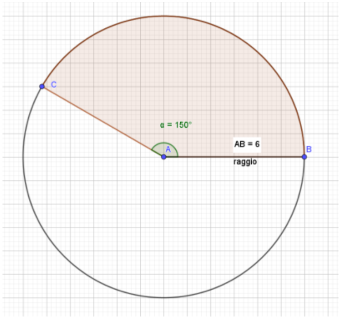
Infine gli alunni imparano ad associare, nelle rappresentazioni di sviluppo piano, un cerchio ad un settore circolare, valutando ad occhio se un cerchio può "chiudere" il settore circolare.



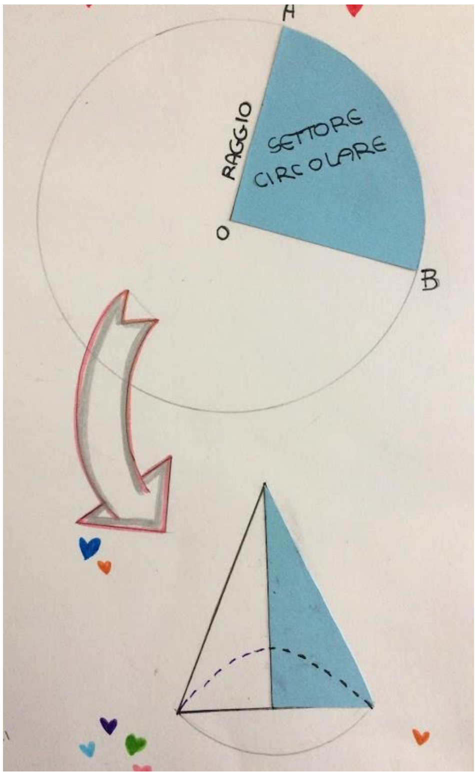
- Gli alunni iniziano a costruire un cono a partire da un cerchio:

  Dal cerchio di raggio 6 cm in figura, ritagliare il settore circolare -colorato di rosso- e attaccare i due lembi AB e AC, senza sovrapposizioni; colorare l'arco di estremi B e C e chiudere il cono con il nastro adesivo.

  Tutti concordano che la linea colorata rappresenta il bordo della base del cono.



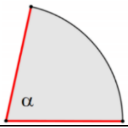
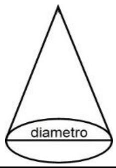
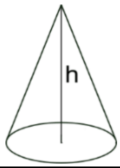
Chiudendo la figura, gli alunni si accorgono che l'apotema del cono è anche il raggio del settore circolare.
Qualche confusione si è manifestata tra il raggio di base del cono e il raggio del settore circolare.

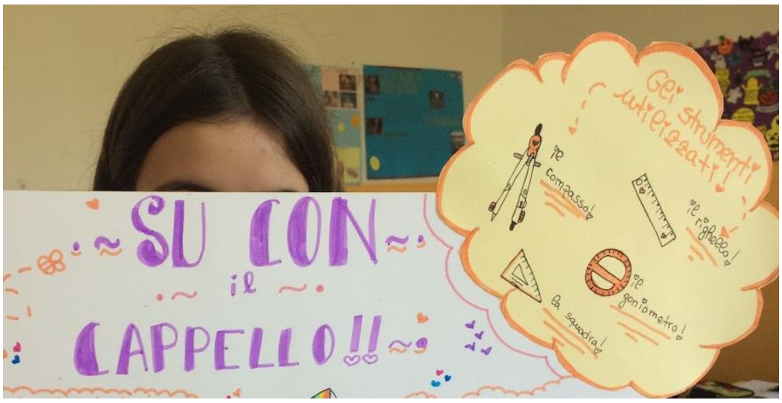


Come si può notare, l'esperienza spaziale ha coinvolto in modo efficace i processi di visualizzazione e di astrazione e la manipolazione dei coni-cappello ha favorito l'osservazione degli oggetti matematici e l'organizzazione graduale delle relazioni geometriche.

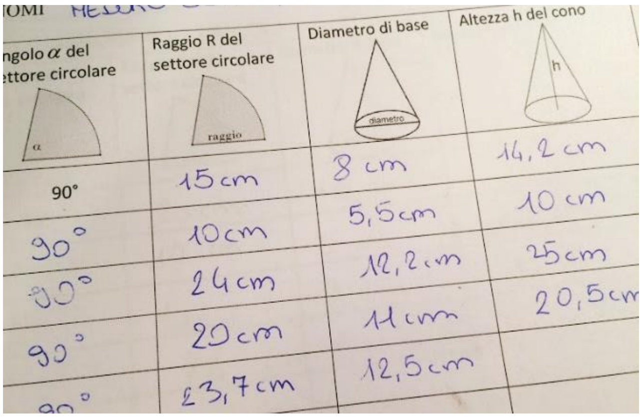
MODULO 5: LA MISURA DEI CONI

La classe ha a disposizione una serie di coni A, B, C, …-realizzati dall'insegnante a partire da settori circolari di ampiezza 90° e di raggio diverso- e suddivisa in piccoli gruppi, procede nella misura dell'apotema, del diametro di base e dell'altezza dei coni; i gruppi si scambiano i solidi, al fine di eseguire misure su ogni modello e trascrivono i dati in una tabella.

GRUPPO ………….. MATERIALI: riga, squadra, goniometro, coni				
	Angolo α del settore circolare 	Apotema ***a*** 	Diametro ***d*** di base 	Altezza ***h*** del cono 
Cono A	90°			
Cono B	90°			



Mentre gli alunni misurano i coni, occorre passare per i banchi, controllare il lavoro dei gruppi, incoraggiare la gestione del tempo e cogliere nelle procedure di esecuzione gli elementi significativi per la riflessione nella discussione finale.
Le schede compilate dai gruppi serviranno a riflettere sulle procedure di rilevamento e a stabilire le misure dei coni.

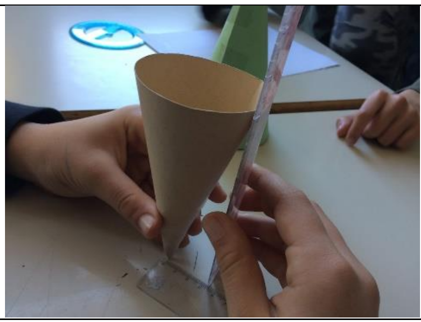


ngolo α del ttore circolare	Raggio R del settore circolare	Diametro di base	Altezza h del cono
90°	15 cm	8 cm	14,2 cm
90°	10cm	5,5cm	10 cm
90°	24cm	12,2 cm	25cm
90°	20cm	11 cm	20,5cm
90°	23,7cm	12,5cm	

MODULO 6: LA RIFLESSIONE SULLE PROCEDURE DI MISURAZIONE

Si procede con la narrazione delle procedure: *Come avete fatto a prendere le misure?*

a) *Come avete fatto a misurare il diametro?*

"Abbiamo messo il cono all'ingiù e abbiamo misurato con il righello la distanza tra due punti della circonferenza, cercando di capire dove fosse il centro"	
"Per misurare il diametro abbiamo inserito all'interno del cono il goniometro, per rendere la circonferenza di base più stabile; poi abbiamo poggiato la squadra sopra al centro della circonferenza" Per misurare il diametro abbiamo inserito all'interno del cono il goniometro, per rendere la circonferenza di base più stabile, poi abbiamo poggiato una squadra sopra al centro della circonferenza	
"Abbiamo messo il cono all'ingiù su un righello a zero cm; poi abbiamo usato un altro righello in verticale appoggiato al bordo del cono e abbiamo misurato il raggio sul righello orizzontale; poi abbiamo moltiplicato per 2"	

Come si può notare, c'è chi ha misurato il diametro individuando "ad occhio" la massima distanza, chi ha individuato la posizione del centro "spostandolo" nel vertice del cono, c'è chi si è preoccupato di partire dallo zero del righello, c'è chi si è adoperato nel tenere salda la forma conica per non variarne le dimensioni.

b) *Come avete fatto a misurare l'altezza del cono?*

"Con la squadra e il righello: abbiamo posizionato l'angolo di 90° della squadra alla base del cono e con il righello, che abbiamo posizionato orizzontalmente sulla punta del cono." CON LA SQUADRA E IL RIGHELLO: ABBIAMO POSIZIONATO L'ANGOLO DI 90° DELLA SQUADRA, ALLA BASE DEL CONO E CON IL RIGHELLO CHE ABBIAMO ORIZZONTALMENTE POSIZIONATO SULLA PUNTA DEL CONO;	

“Abbiamo messo la matita sulla punta del cono e abbiamo appoggiato il righello perpendicolarmente al banco”	

La scelta degli strumenti è stata diversificata, una coppia di righelli, o un righello insieme ad una squadra oppure un righello con bastoncino.
La lettura del righello/squadra, posto perpendicolarmente alla base del cono, è stata talvolta sottovalutata dagli studenti, che non avevano considerato che lo zero non è posto all’estremità della riga, fornendo così misure imprecise con uno scostamento di circa 5 mm.
Per una misura più verosimile, alcuni alunni hanno proposto di inserire sotto il cono lo spessore di un quaderno, altri di appoggiare il righello verticale sul fianco del banco facendo “scendere” lo zero a livello del piano del banco.

Nella discussione infine si è osservato l’impossibilità di misurare l’altezza del cono, quando il cono è “aperto”: *perché la circonferenza base non è più presente e perché l’altezza non va confusa con l’apotema.*

MODULO 7: I NUMERI DECIMALI

I dati raccolti dai gruppi di lavoro sui coni del modulo 5 sono trascritti in una apposita tabella. A titolo esemplificativo, mostriamo la tabella di tre coni:

Cono 1			**Cono 2**			**Cono 3**		
apotema *cm*	diametro di base *cm*	altezza cono *cm*	apotema *cm*	diametro di base *cm*	altezza cono *cm*	apotema *cm*	diametro di base *cm*	altezza cono *cm*
14	10	7,5	20	10	20	24	12	24
14,8	8,3	14,5	20	10	19	24,5	12,2	24,4
14	8	13	20	10	15	24,5	12	23
15	7,2	14	20	10	15	24	12	18,5
15	8	14,2	20	10	20	24	12	18,5
14	7	14	20	10	15	24	12	24
15	8	14,2	20	10,1	19	24	12	18,5
15	8	10,5	20	10	15	24,5	12,8	23,5
14	7	14	20	10	20	23,5	12	25
14	7,5	14	23,8	12,5	23,5	24	12	18
media =	media =	media =	media =	media =	media =	media =	media =	media =

Gli alunni si rendono conto che in tabella qualcosa non va, e motivano che la lettura delle tacche sul righello non sempre riusciva facile.
Una scheda di gruppo è stata utile per riflettere sui dati raccolti:

GRUPPO ………………………………………………………….. DATA …………..

- Osservate le *righe* della tabella.
  Ci sono errori dovuti alla difficoltà di *lettura* degli strumenti di misura? ……………
  Ci sono errori grossolani dovuti alla *distrazione* dell'operatore che ha misurato? ……
  Quali errori si possono *eliminare*? ………………Quali errori potete *ridurre*? …………

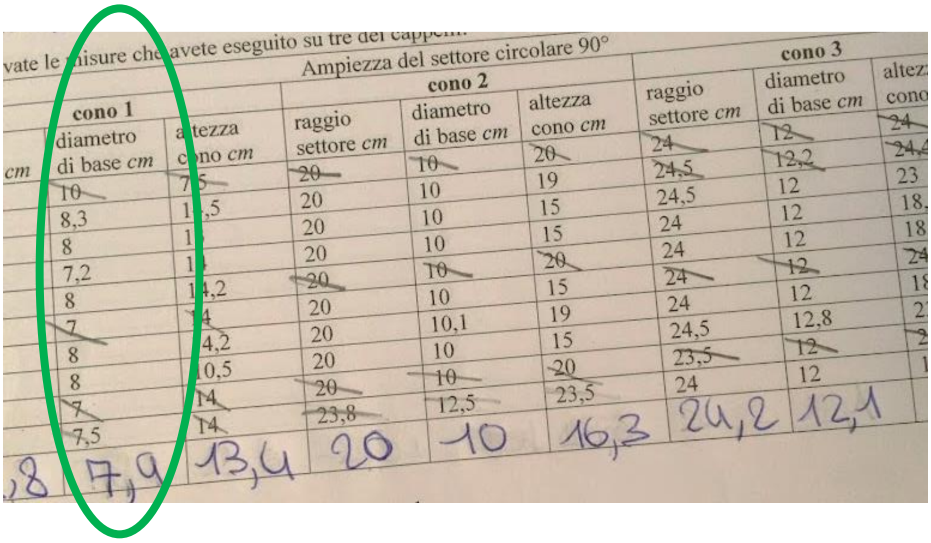
- Osservate le *colonne* della tabella.
  Che cosa potete dire delle misure dell'apotema di un cono? ………………………….
  Riuscite a stabilire la misura precisa dell'apotema di un cono? ………………………
  E nel caso delle misure del diametro? ……… nel caso dell'altezza? …………

- Sapete che la "*sensibilità*" di uno strumento è il *minimo* valore della grandezza che si vuole misurare, apprezzabile dallo strumento:
  Qual è la sensibilità del righello? ……… Qual è la sensibilità del goniometro? ………

- La *misura attendibile* è data dalla *media aritmetica* delle misure trovate, che si ottiene dividendo la somma delle misure per il numero di misurazioni eseguite. La media aritmetica pur non essendo la misura esatta, è però preferibile alle singole misure perché più attendibile.
  Dopo aver eliminato gli errori grossolani, calcolate nell'ultima riga la media aritmetica dei dati di ogni colonna.

Gli alunni si mettono all’opera:

- *In ogni cono la misura dell’altezza non può essere né uguale né maggiore a quella dell’apotema: si eliminano i dati incompatibili.*
- *Si sommano i dati restanti di ogni colonna e si divide per il numero di tali valori.*
- *Il numero decimale ottenuto viene approssimato alla cifra dei decimi per difetto (se la cifra successiva a questa è minore di 5) o per eccesso (se la cifra successiva è uguale o maggiore di 5).*


...vate le misure che avete eseguito su tre dei cappe...

Ampiezza del settore circolare 90°

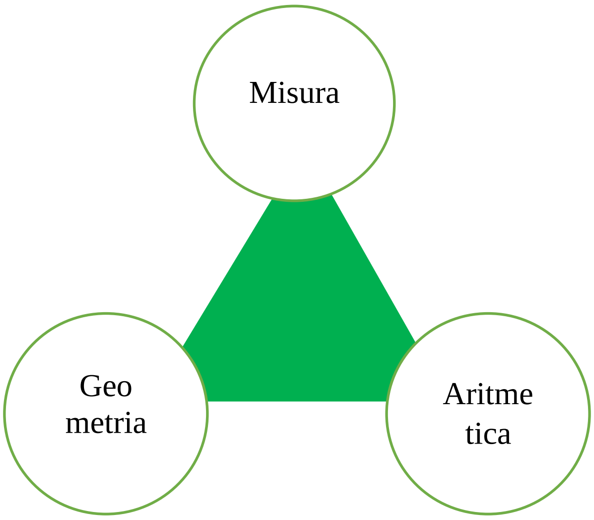
cono 1		cono 2			cono 3	
diametro di base *cm*	altezza cono *cm*	raggio settore *cm*	diametro di base *cm*	altezza cono *cm*	raggio settore *cm*	diametro di base *cm*
~~10~~	~~7,5~~	~~20~~	~~10~~	~~20~~	~~24~~	~~12~~
8,3	1[illegible],5	20	10	19	~~24,5~~	~~12,2~~
8	1[illegible]	20	10	15	24,5	12
7,2	1[illegible]	20	10	15	24	12
8	1[illegible],2	~~20~~	~~10~~	~~20~~	24	12
~~7~~	~~14~~	20	10	15	~~24~~	~~12~~
8	[illegible]4,2	20	10,1	19	24	12
8	10,5	20	10	15	24,5	12,8
~~7~~	~~14~~	~~20~~	~~10~~	~~20~~	~~23,5~~	~~12~~
~~7,5~~	~~14~~	~~23,8~~	~~12,5~~	~~23,5~~	24	12
7,9	13,4	20	10	16,3	24,2	12,1

La complessità delle misure viene controllata con qualche ragionamento e un semplice calcolo:

- *Poiché in un righello è impossibile misurare lunghezze più piccole di 1 mm, ogni misura avrà un’incertezza di 1 mm.*
- *I valori più accurati del diametro del cono n.1 sono 8,3 – 8 – 7,2 – 8 – 8 – 8*
- *La media aritmetica di questi valori risulta (8,3+8+7,2+8+8+8):6 = 7,9*
- *L’incertezza della misura di questo diametro, dovuta agli errori casuali, è espressa dalla differenza tra il valore massimo e il valore minimo diviso per 2, cioè (8,3 – 7,2):2 = 0,55*
- *La lunghezza del diametro del primo cono è quindi uguale a (7,9 ± 0,55) cm.*

Il nucleo “***La misura***” - che non si esaurisce nella scuola Primaria, come mostrano certe difficoltà degli alunni anche nella scuola secondaria di primo grado – è stato qui rimarcato per configurare, con un uso idoneo degli strumenti, il riconoscimento di una unità di misura e una contestualizzazione per i numeri decimali.

La sperimentazione laboratoriale ha efficacemente prodotto un intreccio di percorsi geometrici e aritmetici convergenti nel campo della misura, nell’ottica di una pluralità dei linguaggi matematici.

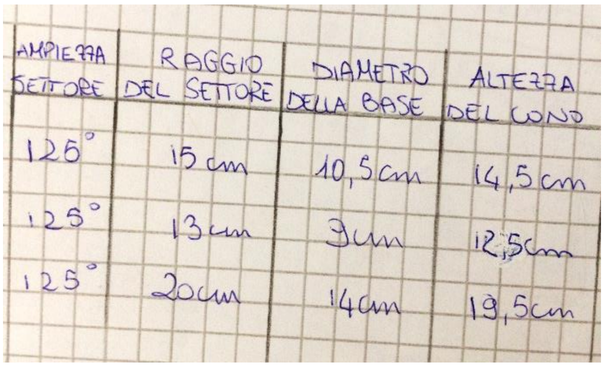


MODULO 8: CAPPELLI PER TUTTI I GUSTI

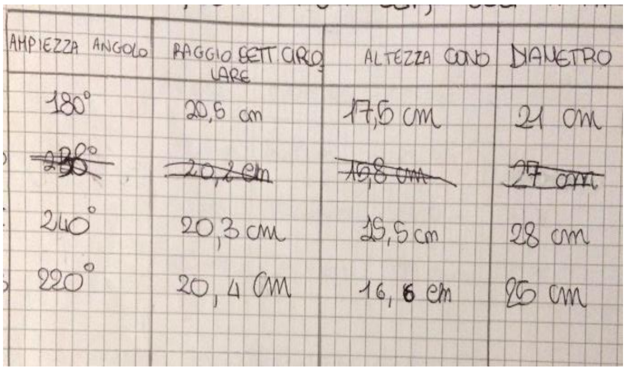
A questo punto, dopo aver padroneggiato gli strumenti di misura e individuato diametro, altezza, e apotema del cappello per la festa di Giuliano, il lavoro dei gruppi è stato dedicato all'ampiezza del settore circolare. I cappelli sottoposti alla classe sono di due tipologie:

- *cappelli "stretti"* come quelli di cartoncino che si vendono per le feste di compleanno - con stessa ampiezza e apotema diverso;
- *cappelli "larghi"* simili al modello cinese in paglia – con stesso apotema ma ampiezza diversa.

Gli alunni preparano le tabelle per la raccolta delle misure relative al settore circolare (ampiezza e raggio) e al cono (altezza e diametro); alcuni gruppi misurano i cappelli "stretti" e altri i cappelli "larghi".



AMPIEZZA SETTORE	RAGGIO DEL SETTORE	DIAMETRO DELLA BASE	ALTEZZA DEL CONO
125°	15 cm	10,5 cm	14,5 cm
125°	13 cm	3 cm	12,5 cm
125°	20 cm	14 cm	19,5 cm



AMPIEZZA ANGOLO	RAGGIO SETT CIRCOLARE	ALTEZZA CONO	DIAMETRO
180°	20,5 cm	17,5 cm	21 cm
~~230°~~	~~20,2 cm~~	~~19,8 cm~~	~~27 cm~~
240°	20,3 cm	19,5 cm	28 cm
220°	20,4 cm	16,6 cm	25 cm

Qui sono riportati i dati raccolti da alcuni gruppi:

cono 1				cono 2				cono 3			
α	*a*	*d*	*h*	α	*a*	*d*	*h*	α	*a*	*d*	*h*
angolo settore circolare (°)	raggio settore circolare *cm*	diametro di base *cm*	altezza cono *cm*	angolo settore circolare (°)	raggio settore circolare *cm*	diametro di base *cm*	altezza cono *cm*	angolo settore circolare (°)	raggio settore circolare *cm*	diametro di base *cm*	altezza cono *cm*
123°	12,4	8,8	11	123°	15	10,2	14,0	123°	20	14,2	19,0
123°	12,4	8,8	11,9	124	14,7	10	12,3	125°	19,2	14,1	18,3
125°	13	9	12,5	125	15	10,5	14,5	125°	20	14	19,5

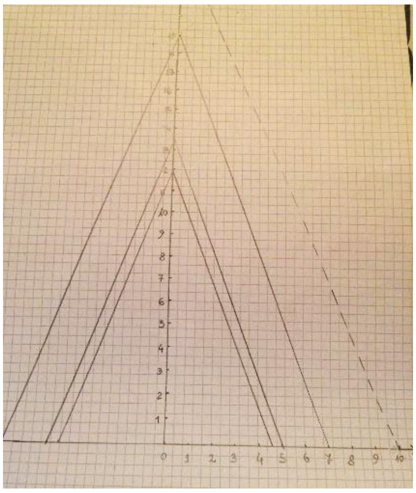
Gli alunni analizzano le tabelle:

... sono riportati i dati raccolti dei gruppi I, II e III. Calcolate nell'ultima riga la media aritmetica relativa ad ogni grandezza:

cono 1				cono 2				cono 3			
α	a	d	h	α	a	d	h	α	a	d	h
angolo settore circolare (°)	raggio settore circolare *cm*	diametro di base *cm*	altezza del cono *cm*	angolo settore circolare (°)	raggio settore circolare *cm*	diametro di base *cm*	altezza del cono *cm*	angolo settore circolare (°)	raggio settore circolare *cm*	diametro di base *cm*	altezza del cono *cm*
123°	12,4	8,8	11	123°	15	10,2	14,0	123°	20	14,2	19,0
123°	12,4	8,8	11,9	124	14,7	10	12,3	125°	19,2	14,1	18,3
125°	13	9	12,5	125	15	10,5	14,5	125°	20	14	19,5
124°	12,6	8,9	11,8	124°	14,9	10.2	13.6	124	19.7	14,1	18.9

e ragionano su come individuare l'angolo α dei settori circolari:

- *Dalla media aritmetica ricavo che i tre settori circolari hanno la stessa ampiezza 124°;*
- *Confrontando le colonne, noto che aumentando il raggio del settore, aumentano anche il diametro e l'altezza del cono.*
- *I tre coni 1, 2, e 3 disegnati si assomigliano; invece il cono di Giuliano sembra diverso.*



- *L'angolo α per il cappello di Giuliano non può essere 124°.*
- *L'angolo α per il cappello di Giuliano non può essere 90° perché in quel caso il raggio del settore circolare era doppio del diametro e qui non lo è.*
- *Per costruire il cappello per la festa di Giuliano (d= 20 cm, h= 24 cm, a = 26 cm), l'ampiezza α sarà maggiore di 124°.*

E osservano i coni "larghi":

- *Se l'angolo α è uguale a 180°, il diametro 21 cm supera la misura richiesta da Giuliano.*
- *Se l'angolo α è maggiore di 180°, l'altezza del cappello diventa sempre più piccola.*

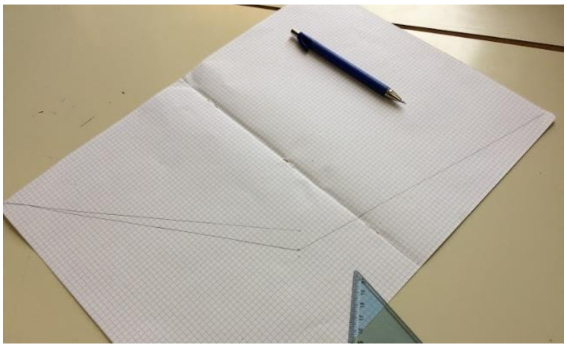
La classe ha così trovato per l'ampiezza del settore l'intervallo su cui lavorare:

$$124° < \alpha < 180°.$$

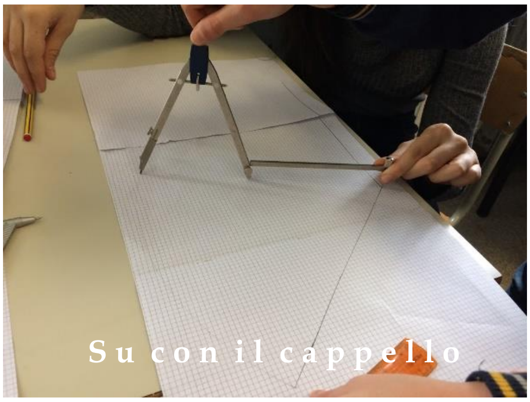
MODULO 9: PER TENTATIVI

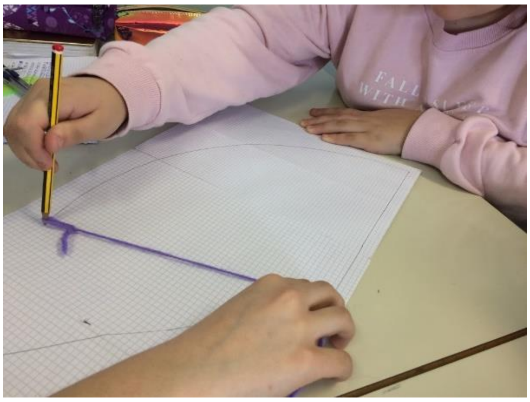
In questa fase la classe procede per tentativi; gli alunni disegnano il settore circolare per la costruzione del cappello di Giuliano, fissando il raggio del settore a 26 cm e variando l'ampiezza: alcuni gruppi provano con valori maggiori di 124° e un gruppo con valori minori di 180°.
Ai tentativi seguono le rappresentazioni grafiche dei settori circolari, la scelta delle dimensioni del foglio da disegno e degli strumenti disponibili, l'assemblaggio del cappello e la verifica delle misure.

- Il settore circolare non sta dentro un foglio A4 ma va disegnato su un foglio A3 più grande, oppure su più fogli attaccati insieme con un nastro adesivo.



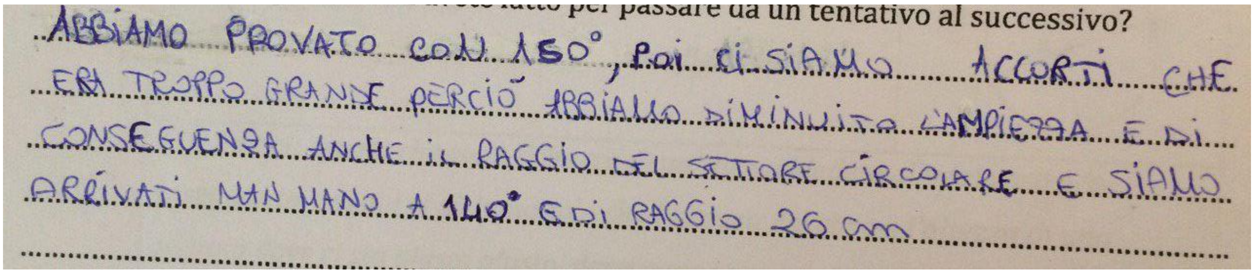
- Il disegno del settore circolare richiede un compasso con prolunga, oppure una cordicella sfruttando il metodo del giardiniere.



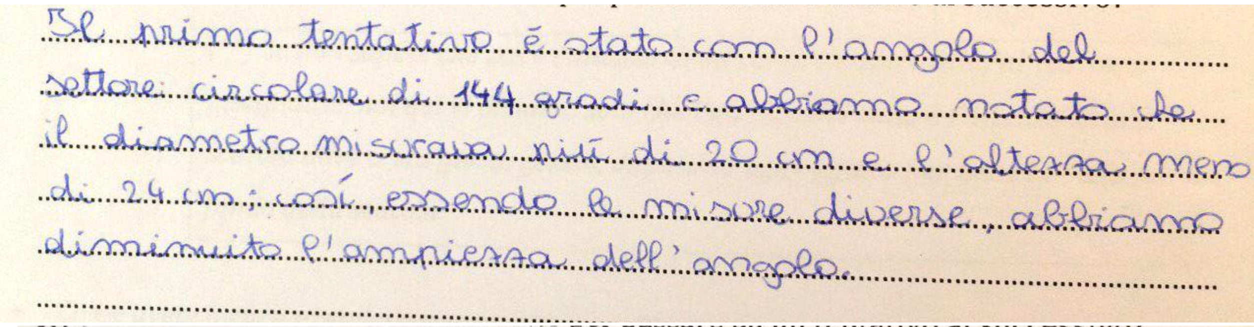


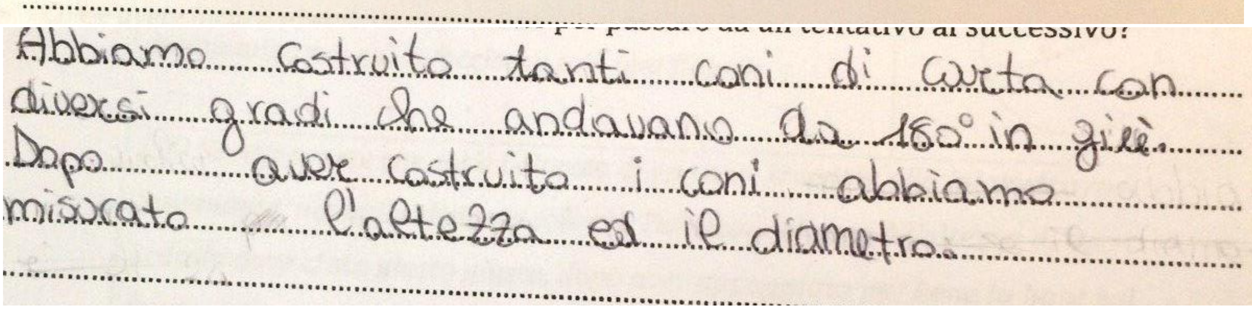
- Il settore circolare viene ritagliato e "cucito" senza sovrapporre i lembi.
  Le misure del cappello costruito vengono confrontate con quelle richieste da Giuliano. Il modello di carta viene rettificato ad ogni tentativo in base allo scarto rilevato.

I ragazzi verbalizzano i procedimenti:


...fatto per passare da un tentativo al successivo?

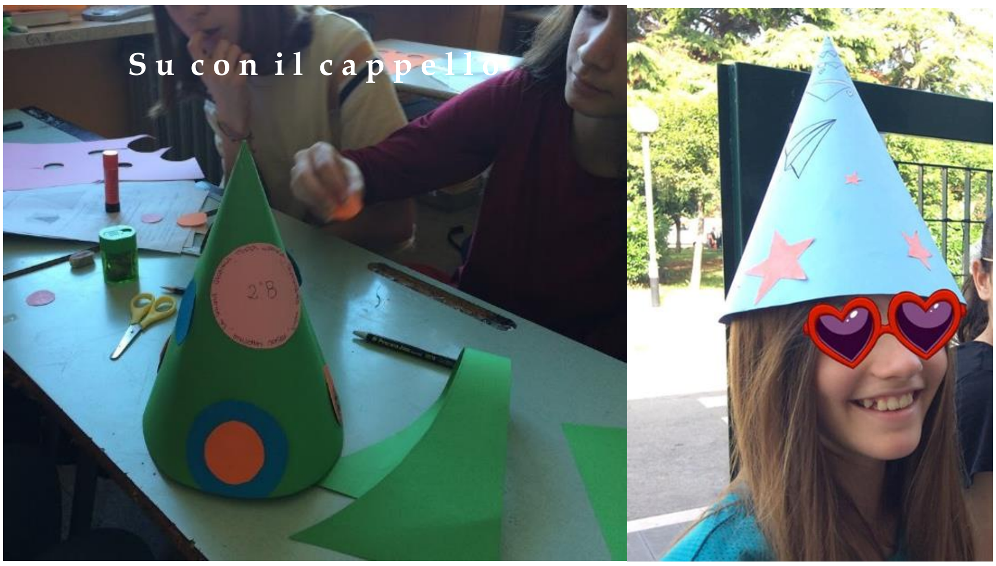
ABBIAMO PROVATO CON 150°, POI CI SIAMO ACCORTI CHE ERA TROPPO GRANDE PERCIÒ ABBIAMO DIMINUITO L'AMPIEZZA E DI CONSEGUENZA ANCHE IL RAGGIO DEL SETTORE CIRCOLARE E SIAMO ARRIVATI MAN MANO A 140° E DI RAGGIO 26 cm


Il primo tentativo è stato con l'angolo del settore circolare di 144 gradi e abbiamo notato che il diametro misurava più di 20 cm e l'altezza meno di 24 cm; così, essendo le misure diverse, abbiamo diminuito l'ampiezza dell'angolo.


Abbiamo costruito tanti coni di carta con diversi gradi che andavano da 180° in giù. Dopo aver costruito i coni abbiamo misurato l'altezza ed il diametro.

- La maggior parte della classe scopre che l'angolo del settore circolare misura 140°;
- Il gruppo che procede iniziando da 180° arriverà al tentativo corrispondente a 150°, non avendo più tempo a disposizione;
- Il gruppo che ha riscontrato maggiori difficoltà assegna all'angolo la misura di 50°.

I gruppi costruiscono finalmente il cappello di cartone, decorandolo per la festa di compleanno!



MODULO 10: QUALCOSA NON E' CHIARO

Il ragionamento o il tentativo non sempre ha funzionato e l'analisi inadeguata del problema o la visualizzazione incompleta del cappello ha generato l'errore.
L'errore in questo laboratorio didattico ha acquistato un ruolo positivo, pensato come un'occasione di apprendimento e non come una colpa da nascondere; è nata così l'esigenza di un ripensamento del processo di apprendimento, con l'aiuto di una discussione collettiva e la realizzazione di cartelloni riepilogativi.

- Nella discussione ripetiamo i procedimenti usati per eseguire le misurazioni, analizziamo le difficoltà incontrate, ripetiamo i concetti base usati; valorizziamo i suggerimenti offerti dei compagni, osserviamo i momenti di superficialità.
  Per esempio, sulla misurazione dell'ampiezza del settore circolare si è notato quanto segue:

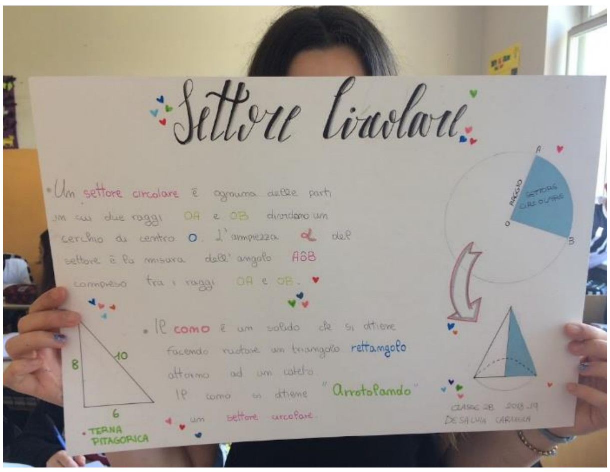
Abbiamo appiattito il cono aperto sul banco e abbiamo misurato con il goniometro il settore circolare. Abbiamo appoggiato il centro del goniometro sul vertice del settore e lo zero su un lato del cartoncino.

Non sapevo che 2-3 gradi nella lettura del goniometro avrebbero portato ad una differenza rilevante nel diametro del cappello.

Non avevo capito che il settore circolare è diverso da un triangolo isoscele.

Alessandro ha fatto presente che il suo gruppo non ha prestato attenzione alle sue idee;
Mattia ha notato che alcuni non hanno lavorato proficuamente nel gruppo;
Simone ha manifestato la complessità del compito;
Lorenza ha capito che occorreva una concentrazione su tutto.

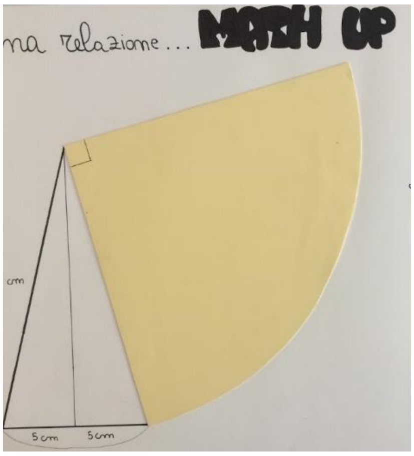
- Per ripassare e capire meglio, per aiutare gli alunni in difficoltà, la classe realizza alcuni cartelloni, con una semplificazione dei concetti di base.
  I gruppi di lavoro sono composti da tre alunni di cui un tutor; i temi sono tre: la descrizione del cono e dello sviluppo piano, le differenze tra coni, le procedure di misura.

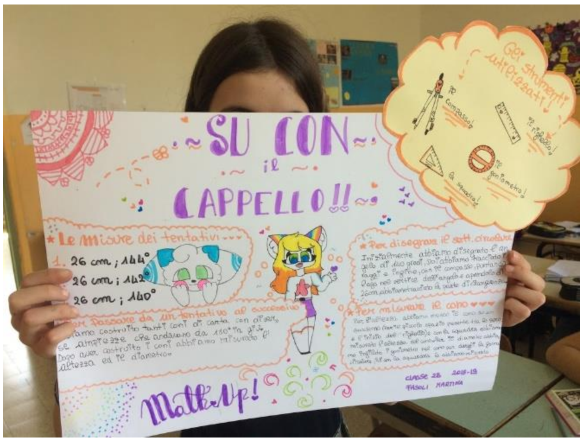


MODULO 11: LA FESTA E I PREMI

Come promesso alla classe, abbiamo organizzato una festa nel cortile con premiazione nell’aula magna della scuola, con il seguente programma:

- Preparazione di cartelloni illustrativi e cappelli decorati.
- Ricreazione all’aperto, con pacchetti di popcorn distribuiti dentro cartocci a forma conica.
- Foto di gruppo sugli scalini della scuola.
- Proclamazione di cinque vincitori;
- Consegna dei premi.





Significativo è il commento della classe sul percorso laboratoriale:

- ***Questo progetto è stato molto costruttivo ma impegnativo, ci è piaciuto molto e speriamo di farne altri.***

- ***Questo problema è stato molto difficile e non sempre siamo riusciti a comprendere le consegne.***

- ***Secondo noi il problema non era difficile, ma ci si doveva solo ragionare.***

- ***L'unica cosa difficile è spiegare i ragionamenti. Più che interessanti sono stati coinvolgenti.***

RIFLESSIONI SULL'ESPERIENZA

Motivazione

La scelta dei contenuti e degli strumenti è derivata dalla necessità di favorire un atteggiamento più positivo verso una matematica e di sottolineare l'aspetto culturale della disciplina.

I mediatori didattici, come il pacco sorpresa e il cappello della festa, hanno creato un clima educativo, incrementato dall'emotività degli alunni, dal coinvolgimento nell'offrire un contributo e dalla libera espressione della propria creatività.

L'allievo carico emotivamente è riuscito a mettere in discussione i coni prodotti e a raffinare le idee per tentativi e ragionamenti, in un processo progressivo di autoriflessione.

Pluralità dell'esperienza

Il piano didattico ha valorizzato una varietà di competenze e una pluralità di punti di vista comuni ad un più ampio concetto dell'unità del sapere, in un contesto di apprendimento in cui l'alunno ha imparato a mettere in relazione un problema (la festa di Giuliano), un cappello da costruire (l'utilità della matematica) e il sapere matematico (i nuclei fondanti).

La progettazione e la costruzione di un cappello hanno messo l'alunno in condizioni di fronteggiare l'approccio alla realtà e la discussione degli errori commessi, e di stabilire un legame tra il cono e lo sviluppo piano, tra la misura e i numeri decimali, tra gli errori e l'espressione delle incertezze.

Imparare a imparare

La classe è riuscita a sviluppare la capacità di orientamento in un contesto problematico e ad "*organizzare il proprio apprendimento, anche mediante una gestione efficace del tempo e delle informazioni, sia a livello individuale sia in gruppo*" – Indicazioni nazionali per il curricolo della scuola dell'infanzia e del primo ciclo d'istruzione 2012.

Per un apprendimento efficace e significativo, l'acquisizione graduale e condivisa dei concetti ha scoraggiato il clima della competizione tra alunni, la risposta veloce e la riflessione di getto ma ha favorito la collaborazione tra pari e l'autocorrezione e la riformulazione di idee.

Formazione

Una formazione continua rappresenta una fonte indispensabile ed inesauribile per la formazione professionale, nel panorama dei rinnovamenti del sistema educativo.

Il Corso *MathUp* in tal senso mi ha aiutato a focalizzare la pratica didattica con un approccio del "*buon senso*". Lo sforzo è stato quello di gestire un problema complesso, cercando di individuare nei nuclei fondanti i contenuti irrinunciabili, le competenze prioritarie e le progressive formalizzazioni, senza banalizzare il sapere matematico, e cercando di sminuire la paura dell'errore.