Scommettiamo?!

L'insegnamento del modulo di introduzione alla teoria della probabilità presenta spesso delle difficoltà e costringe ad operare una scelta di impostazione: presentare una teoria assiomatica o partire da un approccio operativo. La scelta dipende molto dal gruppo classe e dall'indirizzo di studi. Insegnando nell'indirizzo "economico sociale" (LES), ho iniziato ad introdurre la probabilità attraverso un approccio più libero che guarda alle applicazioni; ho inoltre elaborato questa conferenza interattiva costituita da giochi ed esperimenti sul concetto di probabilità per un laboratorio pomeridiano di ragazzi di un istituto tecnico economico (ITE).

Non è una lezione, quindi non vuol avere un approccio sistematico alla teoria della probabilità, né essere un elenco di teoremi ed esercizi di calcolo, ma un intervento che parte da sfide proposte attraverso giochi nei quali la componente di casualità è molto alta e che ha come finalità il far riflettere sul concetto di probabilità ed educare ad un atteggiamento più razionale e quantitativo di fronte a scelte in condizioni di incertezza.

Interventi di questo tipo, se riescono a coinvolgere nel gioco e a creare situazioni concrete che danno anche la possibilità di analizzare meccanismi psicologici, vengono oggi sempre più spesso utilizzati per progetti di contrasto alle ludopatie giovanili, tema che può aprire ad ulteriori approfondimenti di carattere pluridisciplinare (in una classe terza LES, alle mie lezioni sulla teoria della probabilità è seguita la lettura di un romanzo, Il passato è una terra straniera di G. Carofiglio, in collaborazione con la collega di lettere, e ad una successiva riflessione sui temi del gioco d'azzardo con raccolta di dati statistici).

Il docente gestirà i tempi delle attività a seconda del coinvolgimento della classe e dell'interesse suscitato da ogni singolo gioco; non è necessario proporre tutta la sequenza di giochi, il loro utilizzo può essere anche gestito come supporto a lezioni più formali e teoriche.

I giochi proposti:

----

1) IL DILEMMA DI MONTY HALL

Concetti che si vogliono sviluppare: il concetto di probabilità in un gioco complesso dove oltre ad un evento casuale il giocatore deve operare una scelta.

<u>Materiali</u>: tre barattoli non trasparenti distinguibili fra loro, un oggetto che può essere chiuso in uno dei barattoli, un foglio di carta grande che funga da schermo agli occhi degli spettatori mentre l'oggetto viene nascosto in uno dei barattoli.

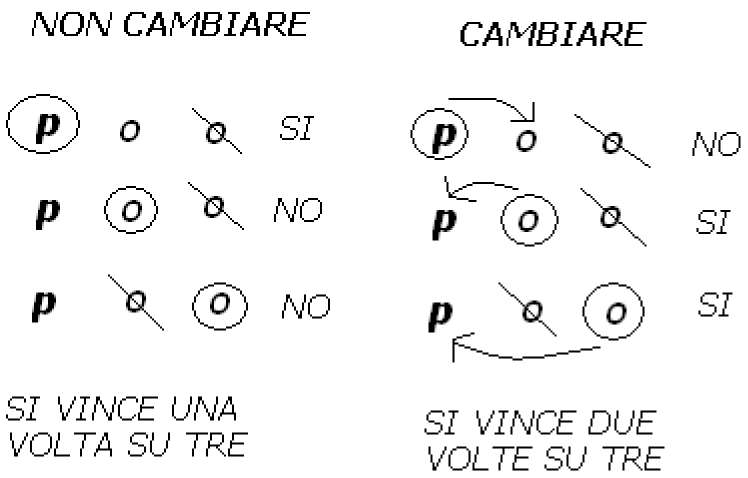
<u>Svolgimento</u>: il docente mostra i tre barattoli e dichiara che in uno di essi è nascosto un oggetto, diciamo una pallina, che simboleggia la vittoria, gli altri due sono vuoti. Lo scopo è indovinare dov'è il premio secondo questa procedura: il concorrente potrà scegliere uno dei tre barattoli, il docente, che conosce la posizione del premio, terrà chiuso il barattolo scelto dal concorrente e aprirà invece uno di quelli vuoti, chiederà infine se si vuol mantenere la scelta fatta o si preferisce cambiar barattolo.

Il quesito è: per avere più possibilità di vittoria conviene cambiare, mantenere la propria scelta iniziale o è indifferente?

Il docente ascolterà le ipotesi e i ragionamenti degli studenti, poi proporrà di giocare un certo numero di partite avendo cura di segnare alla lavagna se vince chi ha cambiato o chi non ha cambiato la scelta iniziale. Per rendere più imparziale la scelta del barattolo vincente si può lanciare un dado.

Già prima di una trentina di partite dovrebbe apparire chiaro che è più conveniente cambiare la scelta iniziale con un rapporto di 1/3 di vittorie per chi non cambia contro 2/3 di vittorie per chi cambia.

<u>Spiegazione</u>: la spiegazione consiste nel mostrare alla lavagna il seguente schema che illustra tutto quello che può accadere.



Se non si cambia la scelta iniziale l'unica possibilità di vincere è di aver centrato subito l'obiettivo con una probabilità di 1/3; se si cambia invece l'aver centrato subito l'obiettivo è il solo caso che porta alla perdita del premio, mentre nei due casi su tre che si sbaglia al primo colpo si centrerà poi l'obiettivo, quindi si vince mediamente i 2/3 delle partite.

Meccanismo psicologico: alla fine della spiegazione il docente illustra il meccanismo psicologico nella situazione reale, questo gioco infatti è proposto al finalista di un quiz americano che con la sua scelta finale si gioca tutto il montepremi accumulato; sotto pressione tendiamo a conservare la scelta iniziale perché in caso di sconfitta ci farebbe più male sapere che avevamo "afferrato il premio" e che lo abbiamo "buttato via", piuttosto di non averlo mai avuto.

----

2) IL BANCO VINCE SEMPRE

Concetti che si vogliono sviluppare: probabilità a priori di un evento aleatorio, legge dei grandi numeri e concetto di gioco equo.

Materiali: dadi da gioco, sia dadi a 6 facce ma anche se si vuole, dadi a più facce. Per rendere i lanci più veloci e uniformi, può essere utile chiudere il dado in una scatolina trasparente (riciclata da qualche prodotto) e realizzare ciascun lancio scuotendo la scatola. Fogli di carta sui quali ciascuno studente segnerà il suo punteggio.

Svolgimento: Il docente mostra un dado a F facce e chiede qual è la probabilità che in un lancio esca uno dei numeri sul dado, si arriva al concetto di probabilità a priori di 1/F come rapporto fra il numero di casi favorevoli ad un certo evento e il totale dei casi possibili.

E se invece di un solo lancio, effettuiamo una sequenza di N lanci, quante volte ci aspettiamo che esca il nostro numero? Anche se la risposta di N/F è intuitiva a priori, si propone di fare una prova.

Se F = 6 su 100 lanci ciascuno dei numeri dovrebbe comparire 17 volte.

Il docente lancerà il dado circa un centinaio di volte segnando alla lavagna tutti i risultati della sequenza che poi potrà essere analizzata per formulare il concetto di legge dei grandi numeri e sfatare il mito del "numero ritardatario"; più la sequenza è lunga più è facile che si presentino occasioni di ragionamento, anche sulla non regolarità della cosiddetta legge dei grandi numeri e sul significato del concetto di "mediamente".

Dopo questa verifica può iniziare il gioco vero!

Il docente proporrà di realizzare un gioco che si basa su molte partite ripetute e di sperimentare la sorte di un giocatore seriale.

Gli studenti immaginino di avere ciascuno un patrimonio iniziale di 100 € per giocare 100 partite in ciascuna delle quali dovranno puntare sull'uscita di uno dei numeri del dado: ogni scommessa ha un costo di 1€ che verrà perso in caso di sconfitta, in caso di vittoria invece oltre al suo euro restituito ciascuno accrescerà il suo patrimonio di una certa quota. Per un dado a F facce, oltre all'euro recuperato, la vincita proposta dal docente, pur presentandosi allettante, non dovrà superare gli F – 2 euro.

Ciascuno è libero di puntare sul numero che preferisce e può cambiare la scelta del numero quante volte vuole.

I giocatori sono invitati ad essere onesti ed a segnare ciascuno su un proprio foglio l'andamento del proprio patrimonio.

Dopo 100 partite il docente sarà in grado di indovinare mediamente l'ammontare dei patrimoni.

Spiegazione: il gioco proposto non è equo, ma, per quanto allettante la vincita proposta dal docente, a lungo andare non realizza l'accrescimento del patrimonio ma il suo impoverimento; infatti l'aspettativa di vittoria per chi scommette in una partita è al massimo $\frac{1}{F}\cdot(1+F-2)=\frac{F-1}{F}$, quindi dopo 100 partite ci si aspetta che mediamente il patrimonio sia di $\frac{F-1}{F}\cdot 100$ €, cioè inferiore ai 100 € iniziali.

Un gioco è definito equo se mediamente non c'è né perdita né guadagno, cioè se la somma messa a rischio da ciascun giocatore è proporzionale alla sua probabilità di vincita.

Esempi:

facce del dado F	ammontare vincita	dopo 100 partite
6	4	83
6	3	67
8	6	88
8	5	75
12	10	92
12	9	83
37 *	35	97

* L'ultimo caso non è un dado a 37 facce ma la roulette con i numeri da 0 a 36 e la proposta di vincere una somma 35 volte la somma puntata!

Naturalmente il fenomeno è sempre più evidente se si aumentano le partite.

<u>Meccanismo psicologico</u>: il docente cercherà di far riflettere sul fatto che ogni gioco è "sbilanciato dalla parte del banco" che, come ogni imprenditore, organizza un'attività dal quale trarre profitto e che l'accanimento da parte dei giocatori seriali non fa che aumentare le proprie perdite.

----

3) QUANTE PALLE ?

<u>Concetti che si vogliono sviluppare</u>: la frequenza di un evento come misura della sua probabilità, connessione fra studi statistici e probabilità per fare previsioni.

<u>Materiali</u>: una borsa non trasparente contenente un certo numero di palline di differenti colori. Per la realizzazione si è utilizzata una comune borsa di tela per la spesa e 11 palline da tennis segnate colorando la tipica riga bianca: 2 con il colore rosso, 3 con il verde e 6 con il blu.

<u>Svolgimento</u>: il docente mostra la borsa dicendo che contiene un certo numero di palline di tre colori distinti e propone il seguente gioco: eseguirà una serie di estrazioni casuali, mostrando e segnando alla lavagna il colore di ciascuna pallina estratta e rimettendo la pallina estratta nella borsa prima della successiva estrazione. Vince il gioco chi per primo interromperà le estrazioni riuscendo a capire l'esatto numero di palline di ciascun colore.

<u>Spiegazione</u>: se, su un numero *N* abbastanza grande di prove, per n_R volte si è estratta una pallina di colore rosso, ci si aspetta che una buona stima del numero delle palline rosse sia $\frac{n_R}{N} \cdot TOT$, dove TOT è il numero totale delle palline. E così per gli altri colori. La frequenza è misura della probabilità di un evento ed è utilizzata per fare previsioni quando alcune informazioni non sono note, infatti per i giochi precedenti conoscevamo perfettamente le caratteristiche dei dadi, ora il numero delle palline di ciascun colore qui non è noto a priori, come giocare con un dado le cui facce non sono note.

----

4) PER ESSERE SICURI CHE…

<u>Concetti che si vogliono sviluppare</u>: è un quiz abbastanza utilizzato in test o concorsi, semplice ma spesso riesce a spiazzare: se ne vuole smascherare il trucco mostrando il ragionamento che porta alla soluzione. Costruire un formula di validità generale.

Materiali: la stessa borsa con le stesse palline del gioco precedente (una comune borsa di tela per la spesa e 11 palline da tennis segnate colorando la tipica riga bianca: 2 con il colore rosso, 3 con il verde e 6 con il blu), ma questa volta è noto a tutti non solo il totale delle palline ma anche il numero di palline di ciascun colore.

Svolgimento: il docente proporrà di risolvere problemi del tipo

"qual è il numero minimo di palline che devo estrarre alla cieca per essere sicuri di prenderne..."

a) due blu

b) due verdi

c) una rossa

d) quattro blu

E così via. Dopo alcune prove, il docente dovrà invitare gli studenti a spiegare la soluzione e li guiderà a costruire una formula generale che risolva questo tipo di problemi.

Spiegazione: Si pensi ad estrazioni successive costruendo la sequenza peggiore possibile all'evento richiesto. Ad esempio nel caso a) si pensi di estrarre prima tutte le rosse e poi tutte le verdi, alla sesta e settima estrazione non potranno che essere due palline blu, quindi estraendo 7 palline si è risposto al quesito. Le soluzioni richieste sono quindi

a) 2R + 3V + 2B = 7

b) 2R + 6B + 2V = 10

c) 3V + 6B + 1R = 10

d) 2R + 3V + 4B = 9

In generale se TOT è il numero totale di palline, distinte in tre colori differenti di cui i numeri sono C_1, C_2 e C_3 per calcolare il numero di palline minimo per essere sicuri di averne x del colore ad esempio C_1 si seguirà la seguente procedura $\mathbf{C_2 + C_3 + x}$ oppure $\mathbf{TOT - (x - C_1) = TOT - x + C_1}$.

Meccanismo psicologico: poiché questi problemi si presentano come estrazioni di oggetti in modo casuale si è portati a ragionare pensando di dover calcolare delle probabilità molto complesse, come si è visto la soluzione è ben più semplice.

---

5) PRONTI A VINCERE ?

<u>Concetti che si vogliono sviluppare</u>: probabilità talmente piccole sulle quali non è ragionevole fare affidamento, per quanto l'evento sperato si verifica, ma a meno di avere a disposizione un numero molto elevato di prove.

<u>Materiali</u>: nessun materiale aggiuntivo alla lavagna sulla quale illustrare i calcoli e una calcolatrice per eseguire moltiplicazioni e divisioni.

<u>Svolgimento</u>: il docente chiede agli studenti se sanno qual è la probabilità di fare 13 al Totocalcio o di azzeccare la sestina del Super Enalotto. Difficilmente otterrà la risposta precisa così proporrà di calcolare queste due probabilità a priori.

<u>Spiegazione</u>:

Totocalcio

Il docente premetterà subito che si tratta di una forzatura poiché i risultati della partite vengono giocate sul campo da atleti e non estratte a sorte, ma un minimo di imprevedibilità c'è sempre così si propone ugualmente questo calcolo come esercizio.

Bisogna indovinare 13 eventi ciascuno dei quali ha tre possibili esiti, vittoria, sconfitta e pareggio, che per facilità supponiamo equiprobabili.

La probabilità cercata è

$$\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}=\left(\frac{1}{3}\right)^{13}=\frac{1}{3^{13}}=\frac{1}{1594323}\approx 6\cdot 10^{-7}=0{,}0000006$$

cioè 0,00006 %.

Per comprendere perché occorre moltiplicare le probabilità di ciascun evento, si può ricorrere ad un grafico ramificato nel caso di poche partite.

Ciò significa che ci si aspetta mediamente di avere 6 vincite ogni 10.000.000 giocate, che significa una vincita ogni circa 1.666.667 giocate.

Super Enalotto

In questo caso si tratta di un puro gioco d'azzardo dove non c'è nessun elemento di abilità.

Bisogna indovinare 6 numeri senza possibili ripetizioni estratti a caso dall'insieme dei numeri naturali da 1 a 90. L'ordine di estrazione non conta.

Dall’esercizio precedente si è compreso che per estrazioni successive occorre moltiplicare le probabilità, questa volta bisogna però considerare che ad ogni estrazione il numero estratto non viene più rimesso nell’urna da cui si procede alla successiva estrazione garantendo così che non vi saranno ripetizioni.

Si può quindi scrivere $\frac{1}{90}\cdot\frac{1}{89}\cdot\frac{1}{88}\cdot\frac{1}{87}\cdot\frac{1}{86}\cdot\frac{1}{85}\approx 2\cdot 10^{-12}$

Questo sarebbe il risultato se contasse l’ordine di estrazione di ciascun numero, poiché basta indovinare i sei numeri indipendentemente all’ordine nel quale vengono estratti, la probabilità è più alta di un fattore che esprime il numero di possibili permutazioni di una sequenza di sei oggetti (formula da illustrare partendo da pochi oggetti).

La probabilità cercata è quindi

$$\frac{1}{90}\cdot\frac{1}{89}\cdot\frac{1}{88}\cdot\frac{1}{87}\cdot\frac{1}{86}\cdot\frac{1}{85}\cdot(6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1)\approx 1{,}6\cdot 10^{-9}\approx 0{,}000000002$$

cioè circa lo 0,0000002 %.

Ciò significa che ci si aspetta mediamente di avere 2 vincite ogni 1.000.000.000 giocate, che significa una vincita ogni circa 500.000.000 giocate.

<u>Meccanismo psicologico</u>: poiché, seppur rari, l’evento di centrare la schedina o quello di vincere al Super Enalotto si verificano la percezione della probabilità del singolo evento è molto sopravvalutata, soprattutto se il giocatore si fa allettare dal meccanismo dell’accrescimento del montepremi come nel caso del Super Enalotto. Quando in palio c’è poco, poche sono anche le puntate ed è difficile che si verifichino delle vincite, ma questo fa aumentare il montepremi e di conseguenza il numero delle giocate aumenta, aumentando così di conseguenza la possibilità di avere una vincita.

FOTO oggetti utilizzati per realizzare i giochi