Premio Nazionale “Cesare Cancellieri”

VI Edizione

Sezione A: didattica della matematica

Domenico Liguori - mim_lig@alice.it

Liceo Scientifico Cariati (CS)

Misuriamo π

Relazione sull’idea di fondo del lavoro prodotto

Questa esperienza è stata proposta in una classe di seconda liceo in preparazione alla IV edizione del PiDay svolta, nel Liceo Scientifico di Cariati, nell’a.s. 2018/19. Avendo già introdotto, precedentemente, le caratteristiche di irrazionalità e trascendenza del π, questa lezione è stata incentrata sulla possibilità di “*misurare*” il valore del π con alcune semplici esperienze a patto di accontentarsi di stimare solo qualche cifra decimale con il suo errore sperimentale. Il percorso è nato dall’idea di presentare degli argomenti di matematica e geometria in un modo diverso dal solito utilizzando il metodo sperimentale per stimolare meglio gli alunni allo studio di questi argomenti. La classe, composta da 28 alunni, è stata suddivisa in 4 gruppi di lavoro. Ogni gruppo ha ricevuto delle consegne in merito alle procedure da seguire per la realizzazione della propria misura. Alla fine tutta la classe ha partecipato ad un brainstorming nel quale ogni referente di gruppo ha portato le proprie conclusioni ed insieme si è dibattuto sui risultati ottenuti e sulla loro reciproca compatibilità. Il percorso è stato diviso in tre momenti diversi: una breve introduzione teorica (60 minuti) per tutta la classe, le misure di gruppo (180 minuti) ed il brainstorming finale (60 minuti).

Obiettivi specifici e trasversali

- Apprendere le basi del metodo sperimentale
- Comprendere il significato e l’importanza delle misure
- Imparare a stimare gli errori sperimentali
- Favorire lo studio della geometria attraverso il laboratorio
- Apprendere il concetto di probabilità e frequenza attraverso esperienze pratiche
- Sviluppare le capacità comunicative ed i rapporti interpersonali
- Favorire il confronto di idee ed opinioni sviluppando il pensiero critico
- Apprendere come lavorare in team
- Utilizzare strumenti informatici per testare ipotesi e fare simulazioni

Metodologia utilizzata

Il percorso è stato diviso in tre momenti diversi: una breve introduzione teorica (60 minuti) per tutta la classe, le misure di gruppo (180 minuti) ed il brainstorming finale (60 minuti). Di conseguenza, le metodologie utilizzate sono state differenti in base alle fasi affrontate. La parte teorica è stata sviluppata con la metodologia della lezione frontale con l'ausilio della LIM. La fase delle misure di gruppo è stata affrontata con una metodologia sperimentale in cui l'alunno ha partecipato attivamente preparando e realizzando le misure "imparando facendo" (learning by doing). Durante questa fase non sono mancati i problemi pratici da affrontare e risolvere (problem solving) procedendo per errori e correzioni (valorizzazione dell'errore). Il lavoro di gruppo, inoltre, ha favorito anche la metodologia del cooperative learning. Nell'ultima parte del percorso, dedicata al brainstorming finale, è stata utilizzata la metodologia della revisione metacognitiva nella quale gli allievi hanno discusso, rivisto e riformulato le proprie idee confrontandole con quelle dei loro colleghi e del docente.

Propedeuticità

Prima di affrontare questo percorso la classe aveva già studiato i concetti di area di una figura piana, volume di un solido, misura ed errore statistico, media aritmetica e deviazione standard, peso, densità, probabilità e frequenza.

Cenni teorici

È stata presentata a tutta la classe una breve descrizione teorica per meglio comprendere il significato delle misure che i gruppi hanno dovuto eseguire. Per avere una stima del valore approssimato del π, rinunciando alle sue proprietà di irrazionalità e trascendenza matematica, possiamo procedere in diversi modi ed in questa occasione ne abbiamo trattato solo quattro. I metodi sperimentali esposti li abbiamo chiamati: *geometrico*, *fisico* e probabilistici (*ago di Buffon* e *lancio casuale*). Il *metodo geometrico* si basa su due misure di lunghezza: la circonferenza ed il diametro di un dato cerchio. Calcolando il rapporto tra circonferenza (C) e diametro (d) si ottiene una stima del π sufficientemente buona entro le prime due cifre decimali in relazione agli errori sperimentali e statistici con cui si misurano le lunghezze. La relazione utilizzata è molto semplice e nota agli alunni sin dalle scuole primarie:

$$\frac{C}{d} = \frac{2\pi r}{2r} = \pi \tag{1}$$

La stima del π attraverso il *metodo fisico* è stata effettuata attraverso delle pesate. Per semplicità abbiamo usato dei solidi di legno aventi tutti la stessa densità. In particolare un cilindro ed un parallelepipedo a base quadrata. I due solidi sono stati scelti con la stessa altezza e con il diametro di base del cilindro pari al lato del quadrato di base del parallelepipedo. Ricordiamo che il peso P di un solido di densità ρ e volume V può essere calcolato con la (2), in cui g rappresenta l'accelerazione di gravità,

$$P = \rho V g \tag{2}$$

e che il volume del cilindro V_c e quello del parallelepipedo V_p possono essere espressi con le (3)

$$V_c = \pi r^2 h \; ; \; V_p = L^2 h \tag{3}$$

dove h rappresenta l'altezza dei due solidi, r il raggio di base del cilindro ed L rappresenta il lato di base del parallelepipedo. I solidi sono stati scelti in modo che:

$$L = 2r \tag{4}$$

per cui dal calcolo del rapporto tra il peso del cilindro e quello del parallelepipedo, dopo le opportune sostituzioni ed alcune semplificazioni, si ottiene la relazione (5) o equivalentemente la (6). Da quest'ultima equazione è possibile ottenere una stima del π come quadruplo del rapporto tra il peso del cilindro e quello del parallelepipedo. Anche questo metodo offre una stima del π sufficientemente buona entro le prime due cifre decimali in relazione agli errori sperimentali e statistici con cui vengono effettuate le misure necessarie.

$$\frac{P_c}{P_p} = \frac{\rho g \pi r^2 h}{\rho g L^2 h} = \frac{\pi}{4} \tag{5}$$

$$\frac{4P_c}{P_p} = \pi \tag{6}$$

È stato osservato che nel caso in cui L=r vale la (7):

$$\frac{P_c}{P_p} = \pi \tag{7}$$

Il valore del π può essere stimato anche attraverso metodi statistici. Uno di questi è quello che utilizza il cosiddetto *ago di Buffon* e consiste nel lanciare dei bastoncini su un certo numero di linee parallele poste tutte alla stessa distanza tra di loro e contare il rapporto dei bastoncini che intersecano le linee rispetto al loro numero totale lanciato. Nel nostro caso abbiamo utilizzato degli stuzzicadenti di lunghezza L e un foglio di cartoncino sul quale sono state disegnate delle linee parallele tutte a distanza d tra di loro. La stima del π attraverso questo metodo sfrutta la relazione, espressa dall'equazione[1] (8)

$$\pi = \frac{2L}{dP} \tag{8}$$

Nell'equazione (8) P rappresenta la probabilità che lo stuzzicadenti intersechi una linea. Nell'ipotesi che il numero dei lanci sia sufficientemente grande (*legge dei grandi numeri*[2]) questa probabilità può essere sostituita con la frequenza degli stuzzicadenti che intersecano le linee, ovvero il rapporto tra il numero degli stuzzicadenti che intersecano le linee ed il loro numero totale lanciato. Ci siamo soffermati sul fatto che la probabilità è una stima che si esegue prima del verificarsi degli eventi, mentre la frequenza è un conteggio che avviene dopo che gli eventi si sono verificati. Trattandosi di un metodo statistico è stato spiegato bene che la stima del π attraverso questo metodo è fortemente dipendente dal numero di lanci effettuati e dal modo in cui gli stuzzicadenti vengono lanciati (bisogna assicurare, quanto più possibile, che gli stuzzicadenti lanciati abbiano la stessa probabilità di cadere su ogni parte del foglio utilizzato). A tal fine è stato suggerito di tenere in mano gli stuzzicadenti in modo sparpagliato prima di lasciarli cadere, evitando di formare gruppi allineati tutti allo stesso modo, di non guardare sul foglio (per evitare di mirare) e di ruotare casualmente il foglio ad ogni lancio per evitare di memorizzare l'orientamento delle righe e di influenzare la caduta degli stuzzicadenti. Gli eventuali stuzzicadenti usciti fuori dal foglio sono stati rilanciati. L'altro metodo statistico utilizzato è quello dei *lanci casuali*. In questo caso è stato utilizzato un cartoncino sul quale gli alunni hanno disegnato un quadrato con un cerchio inscritto. Gli allievi sperimentatori hanno fatto cadere, sempre in modo casuale, dei chicchi di pasta contando quelli che si posizionavano all'interno del cerchio e quelli totali caduti all'interno del quadrato. I chicchi sui bordi sono stati esclusi dal conteggio. Per assicurare la massima casualità ed omogeneità nella distribuzione in caduta dei chicchi di pasta è stato utilizzato un setaccio di dimensioni maggiori delle figure disegnate sul cartoncino. Il rapporto tra il numero dei chicchi caduti all'interno del cerchio e quelli caduti sul quadrato è proporzionale al rapporto delle aree delle due figure e, sempre nell'ipotesi di un numero sufficientemente alto di lanci (*legge dei grandi numeri*[2]), può servire per stimare il valore del π utilizzando la (9):

$$\frac{A_c}{A_q} = \frac{\pi r^2}{(2r)^2} = \frac{\pi}{4} \tag{9}$$

in cui A_c rappresenta l'area del cerchio di raggio r, A_q quella del quadrato con lato pari al diametro del cerchio. Nell'ipotesi di validità della *legge dei grandi numeri*[2], la (9) può essere sostituita con la (10)

$$\frac{f}{n} = \frac{\pi}{4} \tag{10}$$

in cui f rappresenta il numero di casi favorevoli, chicchi caduti dentro il cerchio, ed n il numero dei casi totali ovvero tutti i chicchi all'interno del quadrato. Il quadruplo di questo rapporto di conteggi, offre una stima statistica del π la cui bontà, anche in questo caso, è fortemente dipendente dal numero di lanci eseguiti.

Le quattro misure

Ogni gruppo di alunni ha avuto a disposizione una scheda con le indicazioni da seguire per effettuare al meglio la propria misura e tutti gli strumenti necessari per eseguirla. Al primo gruppo sono state affidate alcune forme circolari (vedi figura 1), un righello con sensibilità pari ad un millimetro ed un nastro inestensibile per la misura delle circonferenze. Per il secondo gruppo è stato messo a disposizione una bilancia elettronica con sensibilità pari a 0.01 grammi e alcuni solidi di legno (vedi figura 2). Al terzo gruppo è stato fornito un cartoncino segnato con delle righe parallele, degli stuzzicadenti (20 per ogni lancio come si vede in figura 3) ed un righello con sensibilità pari ad un millimetro. Il quarto gruppo, invece, ha ricevuto un cartoncino segnato con un cerchio inscritto in un quadrato, dei chicchi di pasta (circa 100 grammi di "tempestine" come si vede in figura 4) ed un setaccio. Tutti i gruppi, inoltre, hanno avuto a disposizione un pc per l'utilizzo del foglio di calcolo excel. Ogni membro del gruppo ha eseguito almeno una misura riportando tutti i risultati nelle tabelle 1, 2 ,3 e 4 con il calcolo dei rispettivi valori medi e deviazione standard riferita alla media. Al terzo e quarto gruppo sono stati forniti anche delle applets[3] che, simulando gli stessi metodi da sperimentare, hanno dato la possibilità di fare dei confronti con le misure ottenute e riflettere sulla dipendenza del risultato dalla numerosità delle prove effettuate. Ad ogni gruppo, infine, è stato chiesto anche di commentare i risultati ottenuti formulando ipotesi, osservazioni e considerazioni personali da presentare e discutere insieme nella fase di brainstorming.

Fig. 1: Forme circolari per la stima del π con il *metodo geometrico*

Fig. 2: Bilancia elettronica e solidi per la stima del π con il *metodo fisico*

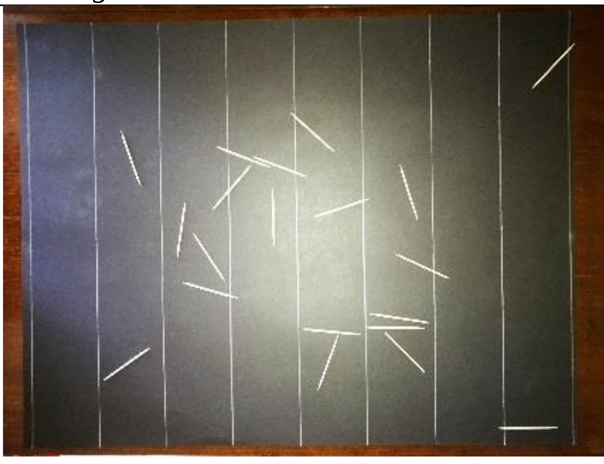

Fig. 3: Cartoncino e stuzzicadenti per la stima del π con il metodo *dell'ago di Buffon*

Fig. 4: Cartoncino e chicchi di pasta per la stima del π con il metodo *dei lanci casuali*

I risultati ottenuti

Per il metodo geometrico gli alunni hanno compilato la tabella 1 con sette misure (una per alunno) di circonferenza e diametro sulle quattro forme circolare a loro disposizione. Le misure di lunghezza sono state effettuate con righelli di sensibilità pari ad un millimetro. La stima del π è stata ottenuta con la formula (1).

	C [cm]	d [cm]		Stima del π			C [cm]	d [cm]		Stima del π
	± 0.1	± 0.1					± 0.1	± 0.1		
Forma circolare 1	57.1	18.1		3.15		Forma circolare 3	8.9	2.8		3.18
	57.0	18.2		3.13			8.9	2.8		3.18
	57.1	18.0		3.17			8.9	2.9		3.07
	57.1	18.1		3.15			8.8	2.8		3.14
	57.1	18.2		3.14			8.7	2.7		3.22
	57.1	18.1		3.15			8.9	2.8		3.18
	57.1	18.1		3.15			8.8	2.8		3.14
Forma circolare 2	17.3	5.5		3.15		Forma circolare 4	42.7	13.6		3.14
	17.2	5.5		3.13			42.6	13.6		3.13
	17.3	5.4		3.20			42.6	13.5		3.16
	17.3	5.5		3.15			42.7	13.7		3.12
	17.3	5.5		3.15			42.7	13.6		3.14
	17.1	5.6		3.05			42.7	13.6		3.14
	17.3	5.5		3.15			42.7	13.7		3.12

Tabella 1: Stima del π con il metodo geometrico. Media=3.15 e deviazione standard riferita alla media=0.01

Il secondo gruppo, per il metodo fisico, ha compilato la tabella 2. Tutti gli alunni hanno effettuato almeno una pesata utilizzando la bilancia con sensibilità pari al centesimo di grammo e alcuni solidi di legno: 6 cilindri e 4 parallelepipedi diversi. Per i primi 4 cilindri della tabella 2, con altezza uguale a quella dei parallelepipedi e diametro di base uguale al lato di base dei parallelepipedi, la stima del π è stata effettuata con la formula (6). Per gli ultimi due cilindri della tabella 2, con altezza pari alla metà di quella dei parallelepipedi e raggio di base pari al lato di base del parallelepipedo, la stima del π è avvenuta tramite la formula (7). Si noti che in questo caso le altezze dei due solidi si uguagliano solo raddoppiando i cilindri, per cui la pesata del cilindro è stata moltiplicata per due.

	Cilindro [g]	Parallelepipedo [g]		Stima del π			Cilindro [g]	Parallelepipedo [g]		Stima del π
	±0.01	±0.01					±0.01	±0.01		
Cilindro 1	24.28	32.58		2.98		Cilindro 3	22.18	32.58		2.72
		28.84		3.37				28.84		3.08
		30.10		3.23				30.10		2.95
		27.63		3.52				27.63		3.21
Cilindro 2	22.09	32.58		2.71		Cilindro 4	23.19	32.58		2.85
		28.84		3.06				28.84		3.22
		30.10		2.94				30.10		3.08
		27.63		3.20				27.63		3.36
Cilindro 5	46.44	32.58		2.85		Cilindro 6	47.45	32.58		2.91
		28.84		3.22				28.84		3.29
		30.10		3.09				30.10		3.15
		27.63		3.36				27.63		3.43

Tabella 2: Stima del π con il metodo fisico. Media=3.12 e deviazione standard riferita alla media=0.04

Il terzo gruppo ha potuto stimare il π con il metodo statistico dell'*ago di Buffon*. Gli alunni hanno avuto a disposizione un cartellone (dimensioni 65.5 cm x 50.5 cm) sul quale avevano già disegnato nove righe parallele distanziate di 8 cm e 20 stuzzicadenti di lunghezza 6.6 cm (vedi figura 3). Ogni alunno del gruppo a fatto cadere gli stuzzicadenti sul cartellone seguendo le indicazioni dettate nella lezione introduttiva per poi contare quelli che intersecavano qualche linea. Il valore del π è stato stimato utilizzando la formula (8). I risultati sono sintetizzati nella tabella 3. A questo gruppo, inoltre, è stato suggerito di confrontare i propri dati con il simulatore presente all'indirizzo https://www.geogebra.org/m/UsAXyGxu e di trarre qualche osservazione da discutere nella fase successiva della lezione.

Stuzzicadenti che intersecano qualche linea	11	12	11	13	9	12	12	10	6	12	14	12	2	6	12
Stima di π	3.00	2.75	3.00	2.54	3.67	2.75	2.75	3.30	5.50	2.75	2.36	2.75	2.75	5.50	2.75

Tabella 3: Stima del π con il metodo dell'*ago di Buffon*. Media=3.21 e deviazione standard riferita alla media=0.25

Il quarto gruppo, infine, ha stimato il π con l'altro metodo statistico: il *lancio casuale* dei chicchi di pasta. Gli alunni di questo gruppo hanno avuto a disposizione un cartellone (dimensioni 65.5 cm x 50.5 cm) sul quale erano stati disegnati due quadrati (lato 24 cm) con due cerchi inscritti, dei chicchi di pasta (come spiegato nella prima parte della lezione) ed un setaccio. Sul cartellone erano stati disegnati due quadrati con altrettanti cerchi inscritti in modo che ogni lancio di chicchi di pasta ha permesso, contemporaneamente, due conteggi. La stima del π è avvenuta utilizzando la formula (10) con i risultati riportati nella tabella 4. Anche a questo gruppo è stato suggerito di confrontare i propri risultati con il simulatore presente all'indirizzo https://www.geogebra.org/m/Zc7N6SNZ e di trarre qualche osservazione da discutere nella fase successiva della lezione.

Chicchi di pasta nel quadrato	Chicchi di pasta nel cerchio	Stima del π
1090	876	3.21
1073	898	3.35
1091	875	3.21
1085	860	3.17
1092	853	3.12
1103	855	3.10

Tabella 4: Stima del π con il metodo del *lancio casuale* dei chicchi di pasta. Media=3.19 e deviazione standard riferita alla media=0.04

Le stime di π, ottenute con i quattro metodi sperimentali, ed i relativi errori sono riportati nella tabella 5:

Metodo	Valore medio di π	Deviazione standard della media
Geometrico	3.15	0.01
Fisico	3.12	0.04
Ago di Buffon	3.21	0.25
Lancio casuale	3.19	0.04

Tabella 5: Sintesi delle stime del π ottenute con i quattro metodi sperimentali utilizzati

Brainstorming e conclusioni

Nel brainstorming della fase conclusiva di questa lezione ogni gruppo ha presentato i propri risultati con qualche osservazione personale. Gli alunni del primo gruppo si sono resi conto che misurare una circonferenza con un nastro equivale a rettificare la circonferenza entro i limiti dell'errore sperimentale e trascurando l'irrazionalità del π. Gli alunni del secondo gruppo hanno constatato che nella misura con uno strumento, come la bilancia elettronica, la sensibilità dello strumento, gli errori sperimentali ed il numero di misure effettuate hanno un peso rilevante sul risultato finale. Gli alunni del terzo e quarto gruppo si sono resi conto, utilizzando le applicazioni fornite per le simulazioni[3], che il risultato migliora notevolmente all'aumentare del numero delle prove effettuate e così facendo, hanno appreso concretamente il significato della *legge dei grandi numeri*[2]. Qualche alunno del terzo gruppo si è anche chiesto cosa sarebbe cambiato, nella stima del π con il metodo dell'*ago di Buffon*, se avessimo variato la distanza tra le righe ed in particolare se fosse stata minore della lunghezza degli stuzzicadenti. Nel quarto gruppo, impegnato nella stima del π con il *lancio casuale* dei chicchi di pasta, è stato osservato che i risultati dell'esperimento sarebbero stati equivalenti se prima avessero lanciato i chicchi di pasta e dopo vi avessero fatto cadere sopra un quadrato con un cerchio inscritto, magari disegnati su un foglio di plastica trasparente in modo da permettere la conta dei chicchi presenti dentro le figure. Alcuni studenti hanno osservato, inoltre, che come per il metodo fisico avrebbero potuto ottenere una stima di π anche come rapporto dei pesi dei due insiemi di chicchi di pasta: quelli dentro il cerchio e quelli dentro il quadrato. La domanda più interessante è stata posta da una alunna che ha chiesto quale delle quattro stime del π, riportate nella tabella 5, fosse "più corretta". Per rispondere a questa domanda abbiamo affrontato il concetto di media pesata e di come poter correlare risultati ottenuti con misure diverse ed aventi errori statistici differenti. Mettendo su un grafico i risultati delle quattro misure con i rispettivi errori statistici (vedi figura 5) diversi alunni hanno constatato, meglio che guardando la tabella 5, quale metodo di misura avesse l'errore statistico più grande e quello più piccolo. Dopo un po' di esempi, gli alunni si sono convinti che la migliore stima del pi greco (π_{best}) che avremmo potuto dare, tenendo conto delle quattro misure con i loro diversi errori statistici, sarebbe stata quella calcolata con la media pesata rappresentata dalla (11) in cui i pesi (w) sono il reciproco del quadrato dei singoli errori (indicati, nella tabella 5, come deviazione standard della media) delle quattro misure.

$$\pi_{best} = \frac{\sum_{i=1}^{4} w_i \pi_i}{\sum_{i=1}^{4} w_i} \tag{11}$$

L'errore sul valore π_{best}, invece, è stato calcolato come il reciproco della radice quadrata della somma dei pesi delle quattro misure. Il risultato finale, che tiene conto di tutte e quattro le misure, è stato di τ_{best}=3.15±0.01.

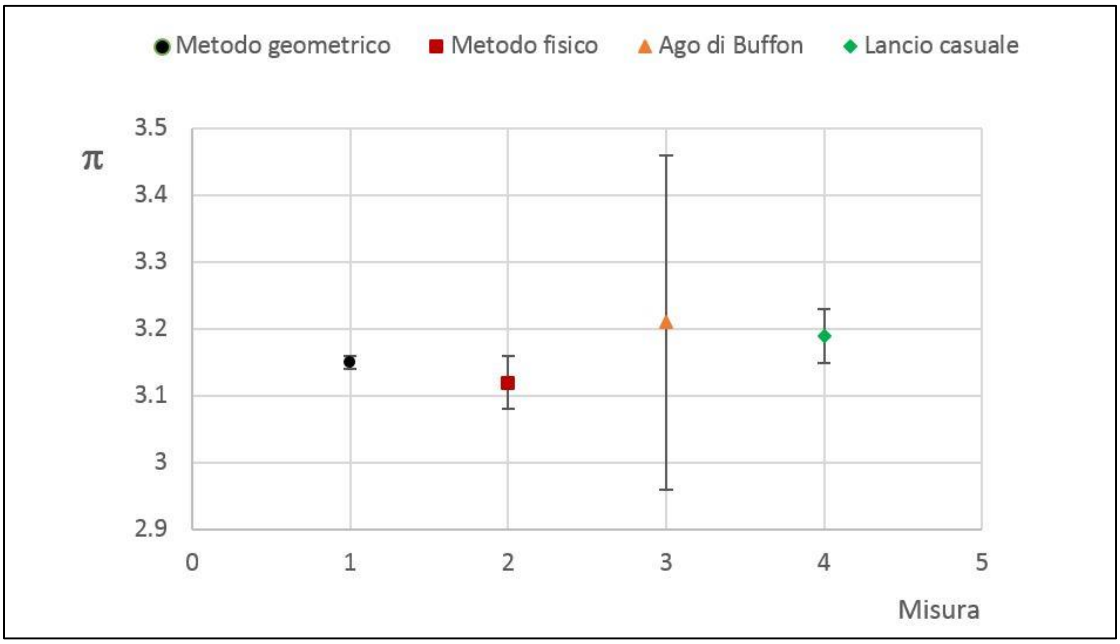

Fig. 5: Grafico realizzato dagli alunni per confrontare i risultati delle quattro misure del π con i rispettivi errori statistici

Alla fine abbiamo concluso ricordando che le misure eseguite sono servite solo per avere una stima del π attraverso delle esperienze basate su un approccio di tipo sperimentale e che l'impossibilità della risoluzione dell'antico problema della quadratura del cerchio mediante l'uso di riga, compasso ed un numero finito di passaggi (ricordato anche da Dante Alighieri nel XXXIII canto del Paradiso[4]) è conseguenza della natura irrazionale e trascendente[5] del π.

Ricaduta sugli alunni nel processo di apprendimento

Il percorso affrontato è stato progettato per avvicinare gli alunni allo studio di alcuni argomenti di matematica e geometria in modo più accattivante del solito sfruttando l'approccio sperimentale e laboratoriale. Questo obiettivo è stato raggiunto in modo soddisfacente come hanno dimostrato le osservazioni e le conclusioni riportate dai diversi gruppi nella fase di brainstorming. I commenti rilasciati dagli alunni nel questionario di gradimento somministrato al termine del percorso didattico, inoltre, hanno evidenziato l'esigenza ed il desiderio di programmare e progettare altre lezioni con la stessa metodologia seguita in questa esperienza. I risultati del processo di apprendimento, valutati prima e dopo questo percorso didattico attraverso delle verifiche, hanno registrato un miglioramento complessivo del 20%.

Note

[1] La dimostrazione dell'equazione (8) è stata lasciata come approfondimento suggerendo come riferimento l'approccio di Polymath consultabile al link

https://areeweb.polito.it/didattica/polymath/htmlS/argoment/APPUNTI/TESTI/Apr_03/Cap17.html#n1.

[2] La *legge dei grandi numeri*, nota anche come *legge empirica del caso* o *teorema di J. Bernoulli*, ci assicura che all'aumentare del numero delle prove eseguite il valore della frequenza tende sempre più al valore teorico della probabilità.

[3] Sono state utilizzate le applicazioni GeoGebra disponibili in rete ai seguenti links:
https://www.geogebra.org/m/UsAXyGxu e https://www.geogebra.org/m/Zc7N6SNZ

[4] Paradiso XXXIII, versi 133-135:*"Qual è il geomètra che tutto s'affige / per misurar lo cerchio, e non ritrova, / pensando, quel principio ond'elli indige,…"*

[5] La natura trascendente del π fu dimostrata da Ferdinand von Lindemann nel 1882.