

## Premio Cesare Cancellieri – Edizione 2014

### Sezione C: giochi matematici, logici e linguistici

#### Relazione del Progetto: Rubicon River – Svolgo o Scompongo

#### Idea di fondo del progetto

*“Se ascolto dimentico,  
se vedo ricordo,  
se faccio capisco”  
Confucio 541-479 a. c.*

*“Fatto così, non è difficile!”* Sono queste le prime parole che si sentono nell’ora di matematica quando gli allievi cominciano a giocare. Il gioco denominato “Rubicon River” è uno strumento didattico facilitatore messo a punto all’IIS “C. E. Gadda” di Paderno Dugnano, dalla prof.ssa Grazia Trisolini in collaborazione con i propri allievi e con il prezioso contributo delle colleghe prof.sse Patrizia La Grassa e Cecilia Cornali che lo hanno testato nelle loro classi. Il kit permette agli allievi, intanto che giocano in piena autonomia, di acquisire competenze sui prodotti notevoli e sulle scomposizioni in fattori dei polinomi, senza ricadere in apprendimenti di tipo mnemonico, come spesso accade col percorso tradizionale.

Per esempio, nel gioco, l’espressione  $(X + A)(X + B)$  ha per modello un rettangolo di lati  $X+A$  e  $X+B$  mentre l’espressione:  $X^2 + (A + B)X + AB$  è una figura composta dalla somma di un quadrato di lato  $X$ , un rettangolo di lati  $A+B$  e  $X$  e un rettangolo di lati  $A$  e  $B$ . L’allievo constata che il quadrato e la figura composta sono equivalenti e deduce che le due espressioni algebriche sono uguali, cioè costituiscono un’unica formula:

$$(X + A)(X + B) = X^2 + (A + B)X + AB$$

#### Gli obiettivi del progetto

- Promuovere negli studenti un approccio creativo allo studio e alla comprensione della matematica.
- Favorire un approccio alla matematica come attività del pensiero e non come un complesso astratto di regole, formule e risultati.
- Studiare la matematica sviluppando le capacità di intuire, progettare, ipotizzare, dedurre, controllare e verificare i fenomeni della realtà.
- Guidare gli allievi alla scoperta delle regole del calcolo polinomiale attraverso il disegno e la costruzione di modelli geometrici.
- Contribuire a creare un modello riproducibile di metodologia di insegnamento.

Con riguardo agli obiettivi previsti dalla programmazione d'Istituto:

COMPETENZE	ABILITA'	CONOSCENZE
<p><b><u>ALGEBRA</u></b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>– Trasformare le procedure del calcolo algebrico in procedure geometriche</li> </ul> <p><b><u>GEOMETRIA</u></b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>– Confrontare e analizzare figure geometriche.</li> <li>– Ragionare correttamente e sviluppare semplici dimostrazioni.</li> <li>– Individuare invarianti e relazioni di figure geometriche</li> </ul> <p><b><u>INGLESE</u></b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>– Comprendere l'essenziale di testi scritti di uso corrente legati alla sfera matematica</li> </ul>	<p><b><u>ALGEBRA</u></b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>– Padroneggiare l'uso delle lettere come costanti, come variabili e come strumento per scrivere formule e rappresentare relazioni.</li> <li>– Riconoscere e saper calcolare i diversi prodotti notevoli.</li> <li>– Saper fattorizzare un polinomio.</li> </ul> <p><b><u>GEOMETRIA</u></b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>– Eseguire semplici costruzioni geometriche.</li> </ul> <p><b><u>INGLESE</u></b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>– Leggere e comprendere semplici testi attinenti ad argomento matematico</li> </ul>	<p><b><u>ALGEBRA</u></b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>– I polinomi.</li> <li>– I prodotti tra i polinomi e le scomposizioni di polinomi.</li> </ul> <p><b><u>GEOMETRIA</u></b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>– Congruenza di superfici e di volumi</li> </ul> <p><b><u>INGLESE</u></b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>– Lessicali: vocaboli ed espressioni legate ad argomento matematico</li> </ul>

### I contenuti del progetto

- Esempio di utilizzo del **Quaderno Operativo Bilingue** intitolato "L'espressione artistica dei polinomi" con i disegni realizzati dagli allievi del biennio del Liceo Linguistico e Scientifico nell'a. s. 2013-2014 (file in pdf).

- **Regole del gioco "Svolgo o Scompongo"** (file in pdf).

- **Un video di presentazione del kit Rubicon River** per giocare a Svolgo o Scompongo, realizzato in Italiano dall'allieva Giorgia Fiorani della classe 3<sup>H</sup>, nel giugno 2014 e quattro video del docente:

[http://www.youtube.com/playlist?list=PL7jPi3rkUOehsHT6FyR\\_6iXzs4ViBFvh8](http://www.youtube.com/playlist?list=PL7jPi3rkUOehsHT6FyR_6iXzs4ViBFvh8)

- **18 video tutorial** in Italiano con esempi di gioco realizzati dagli allievi delle classi 3<sup>H</sup> Linguistico e 3<sup>M</sup>-3<sup>N</sup> Grafico, nel giugno 2014:

<http://www.youtube.com/playlist?list=PLtOPyHHRCNZPv62su1S9O13VIq9lGuNUO>

- **6 video tutorial** in Italiano che mimano errori commessi dai giocatori realizzati dagli allievi della classe 3<sup>H</sup> Linguistico, nel giugno 2014:

<http://www.youtube.com/playlist?list=PLtOPyHHRCNZNRQSCciQngAERnBnb8dFQi>

- **Un video di presentazione del kit Rubicon River** in Inglese per giocare a Svolgo o Scompongo, realizzato dall'allieva Giulia Panetta della classe 3<sup>H</sup>, nel giugno 2014:

<http://www.youtube.com/playlist?list=PLWCv0RdSuRFHOaWpOvexC7jhcpaeUDDzE>

- **3 video tutorial** in Inglese con esempi di gioco realizzati dagli allievi della classe 3<sup>H</sup>, nel giugno 2014:

<http://www.youtube.com/playlist?list=PLWCv0RdSuRFEUPnwulrQO3UD4IZKBT7vv>

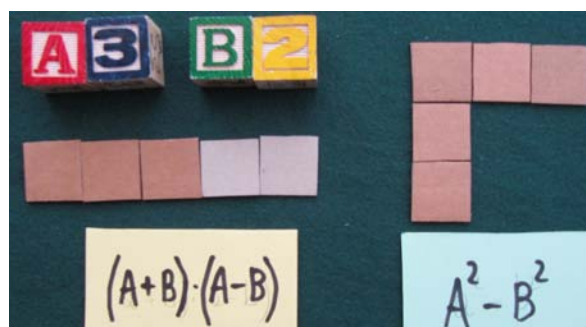
### **Metodologia utilizzata**

Brevi lezioni frontali; metodo induttivo e logico deduttivo; esercitazioni guidate. Per migliorare il metodo di studio e le capacità di deduzione logica, si è insistito sull'uso del linguaggio logico-matematico, lavori di gruppo; scoperta delle regole attraverso il disegno e la costruzione di modelli geometrici; sessioni di gioco.

Il docente di Madre Lingua Inglese ha curato la parte in Inglese per mettere in grado gli allievi di acquisire la terminologia specifica, anche in lingua straniera

### Descrizione del percorso didattico

QUANDO	CHI	COSA	COME
Gennaio-marzo 2013	Docente Trisolini; classi 1^H-2^H Linguistico; 1^S e 2^S Scientifico	<b>Costruzione modelli</b>	Utilizzando materiali vari, anche di recupero



Aprile 2013	Docente Trisolini; classi 2^H Linguistico 2^S scientifico	<b>Messa a punto delle regole del gioco</b>	Attraverso vari brain storming
-------------	---	---	--------------------------------

### SVOLGOSCOMPONGO

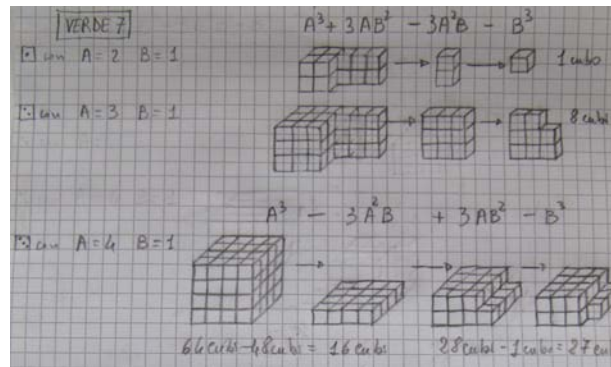
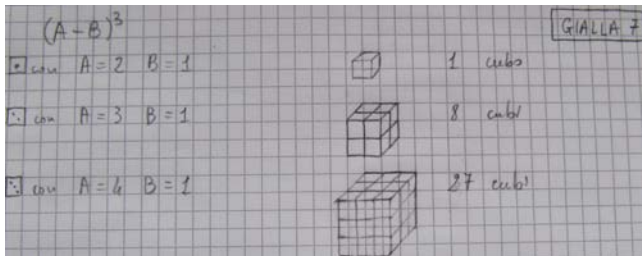
*Origini:* è un gioco per comprendere e memorizzare, ridendo e scherzando, le regole base delle scomposizioni in fattori dei polinomi. Particolarmente indicato dai 10 ai 15 anni.

*In quanti si gioca:* in tre, a turno due giocano e uno svolge il ruolo di arbitro.

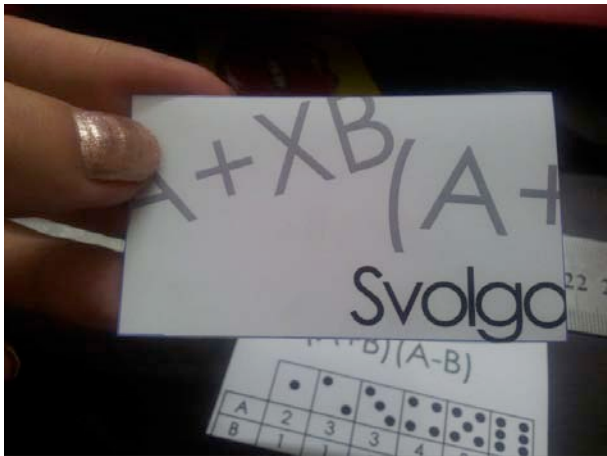
*Con quali oggetti:* 25 quadrati, 64 cubi uno dei quali funge anche da dado, 10 schede gialle (scomposizioni), 10 schede verdi (sviluppi), una clessidra da 5 minuti, un libretto delle soluzioni

scompongo	svolgo
$X(A+B)$	$AX+BX$
$(A+B)(X+Y)$	$AX+AY+BX+BY$
$(A+B)(A-B)$	$A^2-B^2$
$(A+B)^2$	$A^2+2AB+B^2$
$(A-B)^2$	$A^2+B^2-2AB$
$(A+B)^3$	$A^3+3A^2B+3AB^2+B^3$
$(A-B)^3$	$A^3+3AB^2-3A^2B-B^3$
$(A+B)(A^2+B^2-AB)$	$A^3+B^3$
$(A-B)(A^2+B^2+AB)$	$A^3-B^3$
$(X+A)(X+B)$	$X^2+(A+B)x+AB$

Maggio 2013	Docente Trisolini; classi 1 <sup>^</sup> H-2 <sup>^</sup> H Linguistico; 1 <sup>^</sup> S e 2 <sup>^</sup> S Scientifico	<b>Tutte le soluzioni del gioco</b>	Disegnando in classe
-------------	---	---	----------------------



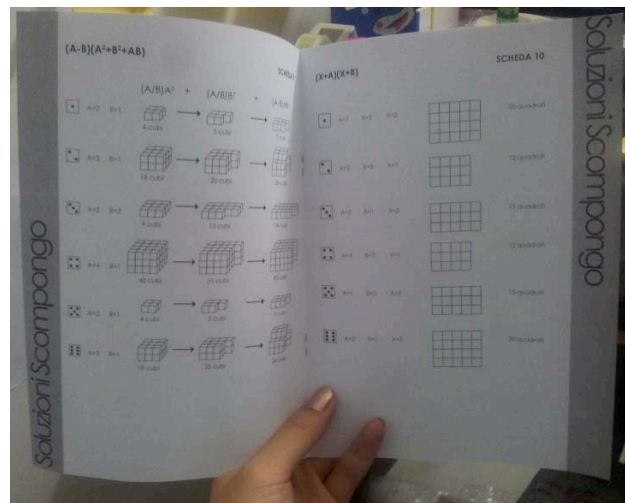
Settembre 2013	Hellatron spa	<b>Produzione prototipo</b>	Fabbricato in Cina
----------------	---------------	---------------------------------	--------------------



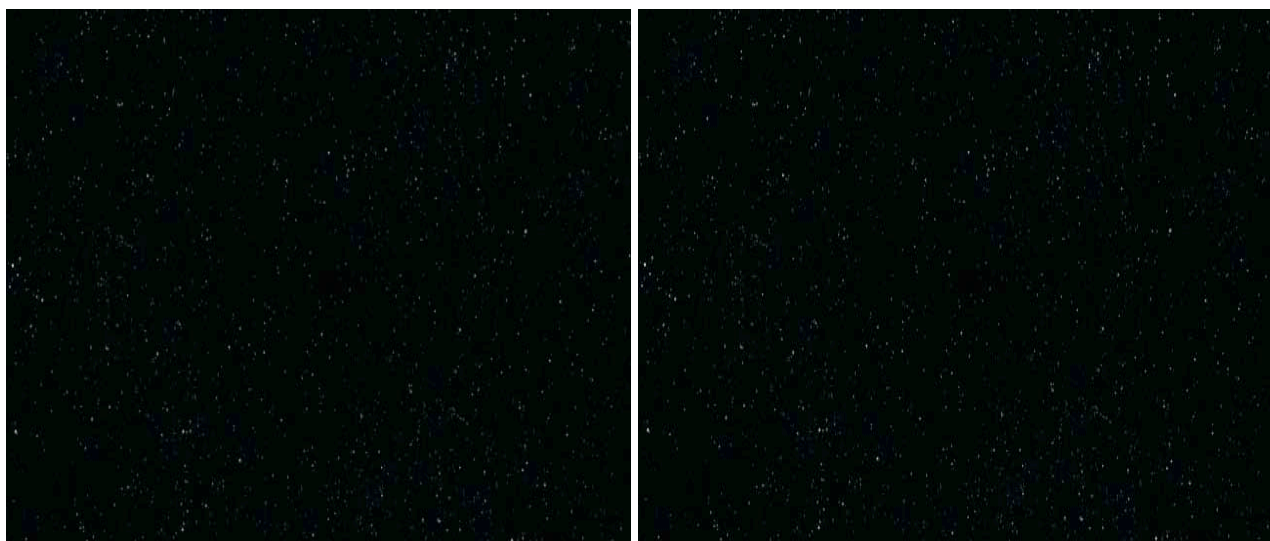
Gennaio 2014	La giornalista Silvia Gissi de "Il Notiziario"	<b>Articolo su "Il Notiziario"</b>	Osservazione diretta e interviste di docente e allievi
--------------	--	--	--



Febbraio 2014	Hellatron spa	<b>Consegna Kit</b>	Tramite corriere
Marzo 2014	I docenti di Matematica: Trisolini, Cornali e La Grassa e le loro rispettive 7 classi	<b>Utilizzo in classe del kit</b>	Sessioni di gioco
Aprile 2014	1^H-2^H Linguistico; 1^S e 2^S Scientifico; 1^M-1^L Grafica e Comunicazione; 1^A Amministrazione e Marketing	<b>Individuazione degli errori di stampa nel manuale</b>	Prove di gioco
Aprile-maggio 2014	Hellatron spa	<b>Manuale corretto</b>	Recapito via mail



3-14 Giugno 2014	Il prof Trisolini e il Madre Lingua Inglese De Sensi; le classi 3 <sup>H</sup> Linguistico; 3 <sup>M</sup> e 3 <sup>L</sup> Grafica e Comunicazione	<b>Realizzazione dei video tutorial in Italiano e in Inglese</b>	Durante la Learning Week – Playing Maths del giugno 2014
------------------	---	--	--

**Presentazione in Italiano:**

<http://www.youtube.com/playlist?list=PLtOPyHHRCNZPK0xvQfbNV6I6QVhmWe936>

**Presentazione in Inglese:**

<http://www.youtube.com/playlist?list=PLWCv0RdSuRFHOaWpOvexC7jhcpaeUDDzE>

**Giocate dei ragazzi in Italiano:**

<http://www.youtube.com/playlist?list=PLtOPyHHRCNZPv62su1S9013VIq9IGuNUO>

**Giocate dei ragazzi in Inglese:**

<http://www.youtube.com/playlist?list=PLWCv0RdSuRFEUPnwulrQ03UD4IZKBT7vv>

**E se uno dei giocatori sbaglia?**

<http://www.youtube.com/playlist?list=PLtOPyHHRCNZNRQSCciQngAERnBnb8dFQi>

Settembre-ottobre 2014	docente	<b>Divulgazione in altre scuole</b>	Contatti diretti o via mail con docenti di altre scuole
Novembre 2014	Docente di Matematica Trisolini, docente di Madre Lingua Inglese De Sensi, allievi del Linguistico e dello Scientifico	<b>Messa a punto del Quaderno Operativo Bilingue per guidare gli allievi alla scoperta dei modelli geometrici dei prodotti notevoli e delle scomposizioni in fattori dei polinomi</b>	Collaborazione tra il docente di Matematica e il docente di Madre Lingua Inglese fuori dall'orario di lezione. Raccolta e selezione dei lavori svolti dagli allievi lo scorso anno scolastico.

## Ricaduta sugli alunni nel processo di apprendimento

**Durante l'anno scolastico 2013-2014**, le classi coinvolte dalla ricaduta del progetto sono state 10: 1<sup>H</sup>-2<sup>H</sup>-3<sup>H</sup> Liceo Linguistico; 1<sup>S</sup>-2<sup>S</sup> Liceo Scientifico; 1<sup>A</sup> Tecnico Amministrazione Finanza e Marketing; 1<sup>M</sup>-1<sup>L</sup>-3<sup>M</sup>-3<sup>L</sup> Tecnico Grafica e Comunicazione.

Considerazioni della prof.ssa Cecilia Cornali delle classi 1<sup>M</sup> e 1<sup>L</sup> del Gadda:

“Nelle prime dell'Istituto Tecnico Grafica e Comunicazione si è utilizzato il kit Rubicon River per presentare i prodotti notevoli e le scomposizioni in modo meno manualistico, ma più concreto. Dopo la prima fase "di gioco", i risultati sono stati incoraggianti e indubbiamente positivi. Il docente ha potuto osservare che gli alunni cambiano il modo di affrontare questa parte di programma, lavorano con oggetti bi- e tri-dimensionali e aumentano la loro capacità di visualizzare oggetti nello spazio. Per esempio,  $(A+B)^2$  non è più solo un numero elevato alla seconda, ma un quadrato di lato  $A+B$ . Naturalmente ci sono alunni con difficoltà pratiche che faticano a costruire i modelli, ma ho notato che alcuni studenti con grosse difficoltà di calcolo sono riusciti ad affrontare comunque gli argomenti in modo proficuo.”

Considerazioni della prof.ssa Patrizia La Grassa della classe 1<sup>A</sup> del Gadda:

“Nella prima dell'Istituto Tecnico Amministrazione e Marketing, gli allievi hanno guardato con diffidenza il materiale contenuto nella scatola del 'Rubicon River', ma dopo aver preso visione del manuale e seguito con scrupolo le regole del gioco, hanno potuto constatare come le regole sulle scomposizioni e sullo sviluppo dei polinomi hanno uno stretto legame con la costruzione di modelli geometrici, nel piano e nello spazio. E' noto quanto sia ostico l'argomento ma il passaggio dalla teoria all'applicazione pratica con oggetti semplici: quadrati e cubi, hanno reso concreto e divertente il loro sapere sull'algebra letterale e numerica. Tanta fatica ma anche grande soddisfazione!”

Considerazioni della prof.ssa Grazia Trisolini delle classi 1<sup>S</sup> – 1<sup>H</sup> – 2<sup>H</sup> – 3<sup>H</sup> del Gadda:

“Come sanno tutti i docenti di matematica e tutti coloro che hanno frequentato una scuola superiore, l'argomento “prodotti notevoli e scomposizioni in fattori dei polinomi” è davvero ostico.

A tale proposito, la mia esperienza d'insegnante in classi sia liceali che tecniche è stata per anni molto deludente. Gli allievi non riescono a memorizzare tutte le 20 formule; le confondono una con l'altra e non riescono ad abbinarle correttamente; appena ne imparano una nuova, dimenticano quella già appresa; spesso il massimo che riescono a fare è applicare, a semplici esercizi, la singola regola oggetto di studio. Chiedere loro di risolvere esercizi che prevedano l'uso di più formule, è fallimentare. Fatta eccezione per alcuni allievi di Liceo Scientifico, dopo qualche mese nessuno ricorda più nulla dell'argomento, come se non fosse mai stato trattato. Negli anni seguenti gli allievi ricadono in false idee preconcepite continuando imperterriti a credere e a scrivere che il quadrato di un binomio sia uguale alla somma dei quadrati di due monomi  $(A + B)^2 = A^2 + B^2$  e che il cubo sia uguale alla somma di due cubi  $(A + B)^3 = A^3 + B^3$ , continuano a non ricordare, né tanto meno a credere che le formule corrette siano invece:

$$(A + B)^2 = A^2 + B^2 + 2AB$$

$$(A + B)^3 = A^3 + B^3 + 3A^2B + 3AB^2$$

L'uso dei modelli geometrici ha operato un cambiamento radicale.



Gli allievi coinvolti nel presente progetto durante l'anno scolastico 2013/2014, appartenevano alle classi 1<sup>^</sup>S del Liceo Scientifico e 1<sup>^</sup>H-2<sup>^</sup>H -3<sup>^</sup>H del Liceo Linguistico, per un totale di 103 allievi.

Tutti hanno memorizzato le 20 formule e sono stati in grado di enunciarle e abbinarle correttamente. In caso di errore è stato più facile farlo loro notare, attraverso i modelli geometrici, che hanno permesso di eradicare le false convinzioni.

Quest'anno tutti gli allievi ricordano ancora le formule e non hanno perso le competenze acquisite. Inoltre ricordano volentieri e con piacere il percorso didattico affrontato, considerandolo gratificante ed efficace.”

### **I commenti degli allievi a proposito dell'uso del Quaderno Operativo per disegnare**

Mauro Bergamaschi 1<sup>^</sup>S: *Grazie a questo progetto, ho potuto apprendere più facilmente l'argomento riguardante lo studio dei prodotti notevoli e le relative scomposizioni in fattori primi. Inoltre con l'aiuto della costruzione dei modelli geometrici disegnati sul quaderno, è stato più facile imparare questo argomento, che in un primo momento può risultare difficile; e sono stati anche di aiuto nel capire quale fosse la soluzione geometrica del prodotto notevole in caso di difficoltà.*

Lenarduzzi Sabrina 1<sup>^</sup>S: *I disegni rappresentanti i polinomi mi sono stati d'aiuto perché hanno permesso di trovare un nesso tra l'algebra e la geometria, in quanto con la rappresentazione grafica, si riescono a memorizzare meglio le formule di prodotti notevoli e scomposizioni.*

Giorgia Lainati 1<sup>^</sup>S: *Il mio apprendimento sull'argomento "prodotti notevoli e scomposizioni in fattori dei polinomi" è stato favorito dal fatto che non ho solo ascoltato le spiegazioni date dalla professoressa e svolto i compiti assegnati, ma ho anche potuto aiutarmi rappresentando i monomi e i polinomi usando figure geometriche di una, due e tre dimensioni. Inoltre, non assistendo solo passivamente alla lezione, ho imparato a rappresentare binomi e trinomi attraverso alcune figure geometriche.*

Riccardo Gnoni 1<sup>^</sup>S: *Questo lavoro mi è stato utile perché mi ha permesso di capire meglio l'argomento che stavamo svolgendo grazie al disegno associato alle varie formule. Inoltre mi ha permesso di non svolgere in modo passivo la lezione che poteva diventare noiosa. A mio parere questo metodo ha reso più semplice la comprensione di un argomento molto complicato in matematica.*

Roberto Manenti 1<sup>^</sup>S: *Lo scoprire un legame tra l'algebra e la geometria mi ha reso l'apprendimento delle scomposizioni in fattori dei polinomi molto più semplice e rapido, poiché trovandomi d'avanti a scomposizioni scritte in maniera algebrica sono riuscito a farmi un rapido modello mentale e a scomporre con successo. Inoltre penso che dando ad uno studente uno strumento che lo coinvolga molto di più rispetto a una lezione "classica" gli renda più facile capire con cosa sta lavorando.*

Chiara Boscarato 2<sup>^</sup>H: *L'apprendimento dell'argomento dei prodotti notevoli e le scomposizioni in fattori dei polinomi è stato favorito dal constatare una correlazione tra l'algebra e la geometria e in particolare poterla capire attraverso i disegni svolti sul quaderno che col tempo ho memorizzato e che hanno reso più concreto e semplice il ragionamento che porta alla soluzione dei prodotti notevoli e di conseguenza l'apprendimento di questo argomento.*

## **I commenti degli allievi che hanno usato il kit Rubicon River nell'a. s. 2013/2014**

### **Allievi di prima Liceo Scientifico**

Sabrina Lenarduzzi: *L'apprendimento dei prodotti notevoli sotto forma di gioco è stato agevolato da un buon lavoro di gruppo, infatti il coinvolgimento tra noi coetanei è stato d'aiuto per memorizzare le formule in maniera più divertente perchè, per vincere, si era più motivati a ricordare il maggior numero di scomposizioni. Non avrei mai pensato di poter imparare così facilmente alcuni aspetti della matematica.*

Riccardo Gnoni: *A me è stato utile perché una normale lezione dell' argomento sarebbe stata certamente più noiosa che giocare. Giocando secondo me ho tenuto un livello di concentrazione più alto poiché il gioco prevedeva una competizione tra due/tre alunni e quindi gli alunni hanno imparato più velocemente e divertendosi.*

Marianna Lysa: *Un mio punto di forza sono state le scomposizioni in fattori dei polinomi; oltre ad averle capite, le ho trovate molto piacevoli e allo stesso tempo divertenti.*

### **Allievi di prima Liceo Linguistico**

Giorgia Furlan: *Un punto di forza è stato il gioco dei cubetti per quanto riguarda la memorizzazione e la costruzione dei modelli.*

Alessandra Fattori: *Mi è piaciuto l'uso dei cubetti poiché ho imparato e capito l'argomento più velocemente.*

Naresh Trivieri: *Il metodo dei cubetti è stato interessante, difficile a volte, ma anche divertente.*

Sara Mornata: *Mi è piaciuto molto il gioco dei cubetti che mi ha fatto capire meglio le espressioni ed è stato allo stesso tempo divertente.*

Sara Pozzi: *Mi sono trovata bene con l'uso dei cubetti e li trovo utili.*

Leonardo Borsari: *Ho trovato utile il gioco Rubicon River e non ho usufruito dello sportello help.*

Daniel Gheorghe: *Ho trovato molto interessanti i monomi e i polinomi perché mi veniva molto più facile imparare usando il Rubicon River.*

### **Allievi di terza Liceo Linguistico**

Manuela Battipaglia: *Lo scorso anno scolastico abbiamo adottato un metodo un po' particolare a parer mio; abbiamo utilizzato dei cubetti in legno per comprendere meglio la matematica. Li usavamo per capire approfonditamente in cosa consisteva l'argomento trattato. Spero di riutilizzare i cubetti perché mi sono trovata molto bene e sono stata in grado di capire veramente.*

Chiara Boscarato: *Il gioco Rubicon River mi ha aiutato molto a capire l'argomento riguardante monomi-binomi-trinomi e soprattutto mi ha aiutato a memorizzare le formule e ad abbinare gli svolgimenti e le scomposizioni.*

Federica Ticozzi: *I prodotti notevoli sono uno dei miei lavori meglio riusciti.*

Roberta Morgante: *Mi sento abbastanza sicura sull'algebra e penso che sia dovuto anche all'uso di Rubicon River durante le lezioni.*

Riccardo Scaccianoce: *L'anno scorso ho trovato molto interesse nello svolgimento del lavoro con il kit Rubicon River perché era un modo interessante e divertente per imparare la matematica, senza troppe complicazioni o difficoltà.*

Greta Viganò: *Secondo me hanno agevolato l'interesse alla lezione gli esercizi con il Rubicon River che servivano ad apprendere l'argomento, ma con un metodo anticonvenzionale quindi a mio parere più leggero e meno noioso.*

Nicolò Bartelle: *Uno dei miei punti di forza dell'anno scorso riguarda i prodotti notevoli.*