

**Premio Cesare Cancellieri II^a edizione 2010
Sezione A: didattica della matematica**

Alcune attività sul teorema di Pitagora

Di Rosa Marincola

**Docente presso l'I.I.S.S. "A. Guarasci" sez. I.T.C. Programmatori
Mercurio – Rogliano (Cs)
rosamarincola@virgilio.it**

**Il lavoro ipermediale qui descritto è reperibile al
seguinte link:**

http://www.exelearning.it/download/doc_details/38-il-teorema-di-pitagora.html

Premessa

In questo lavoro vengono descritte alcune attività didattiche laboratoriali sperimentate, nell'a.s. 2009/2010, con gli studenti della seconda classe del Liceo Scientifico "G.B. Scorza" di Cosenza nell'ambito del corso PON "Il gioco della matematica 2". L'obiettivo è stato quello di recuperare, approfondire e applicare le conoscenze acquisite durante le lezioni curricolari di geometria e algebra. Le attività sono state svolte utilizzando la metodologia didattica learning by doing, ossia mediante l'apprendimento attraverso il fare, attraverso l'operare, dunque mediante le azioni. Le ragioni che mi hanno indotto a ideare e realizzare il percorso sono molteplici. Innanzi tutto, dovendo lavorare con studenti provenienti da classi diverse, era necessario trattare gli argomenti in modo coinvolgente per favorire lo sviluppo di interazioni sociali positive nel nuovo gruppo-classe e all'interno dei piccoli gruppi di lavoro composti da due-tre elementi. Un altro motivo è stato quello di far familiarizzare gli studenti col software didattico a disposizione: foglio elettronico e software di geometria dinamica, utilizzandoli sin dal primo approccio per costruire, manipolare ed esplorare modelli matematici, secondo una "didattica sensata" nella duplice accezione di ragionevole e legata ai sensi cioè all'esperienza (Paola, 2005). Il laboratorio di matematica è stato inteso come ambiente di apprendistato, dove, secondo la suggestiva metafora della *Bottega Rinascimentale*, "si impara facendo e vedendo fare, per tentativi ed errori e anche per imitazione, dei compagni e dell'insegnante" (Paola, 2004). Ho voluto far sperimentare agli studenti il gusto del fare matematica, superando le artificiose "frammentazioni del sapere in materie", come osservava Lucio Lombardo Radice nell'ormai lontano 1976, con un viaggio attraverso le diverse branche della matematica e non solo.

Gli obiettivi di apprendimento si sono configurati sotto forma di “sapere come fare a”, piuttosto che di “conoscere che”; infatti in questo modo gli studenti hanno avuto la possibilità di prendere coscienza del perché è necessario conoscere qualcosa e come una certa conoscenza può essere utilizzata. Per i nativi digitali, abituati a interazioni in modalità sincrone, molti a molti, l’uso delle tecnologie è immediato e continuo, ma induce a facili distrazioni. Per comprendere, approfondire, riflettere e memorizzare, occorre concentrazione, l’apprendere attraverso il fare, attraverso l’operare, favorisce questi processi.

Sosteneva Piaget (1956): *“L’intelligenza è un sistema di operazioni... L’operazione non è altro che azione: un’azione reale, ma interiorizzata, divenuta reversibile. Perché il bambino giunga a combinare delle operazioni, si tratti di operazioni numeriche o di operazioni spaziali, è necessario che abbia manipolato, è necessario che abbia agito, sperimentato non solo su disegni ma su un materiale reale, su oggetti fisici”*. Tali attività “prettamente manuali” non sono sempre possibili con enti matematici basati su teorie astratte, ma la manipolazione e al simulazione attraverso il software costituiscono un valido strumento per favorire la visualizzazione, l’acquisizione di concetti, di tecniche e procedure di calcolo.

Occorre considerare inoltre che non si apprende attraverso il mero fare, affinché l’azione sia didatticamente efficace, è essenziale che l’insegnante guidi la discussione e induca ad un’attenta riflessione.

Attraverso le semplici azioni si memorizzano azioni meccaniche, l’esecuzione di algoritmi o i passi di costruzioni geometriche devono essere interiorizzate, ripercorse mentalmente per acquisire consapevolezza.

All’azione si deve accompagnare il pensiero: quindi il learning by doing, si deve coniugare col learning by thinking.

Il contesto

“Al pari dell’artista il matematico cerca le soluzioni ed i problemi “più belli” ed armoniosi, al pari dello scienziato sperimentale il matematico deve essere pronto a modificare le proprie ipotesi di lavoro sulla base dei risultati via via ottenuti. Queste attitudini sono importanti sia per il matematico che ha poca familiarità con i moderni calcolatori sia per il matematico che invece ha imparato a usare il suo calcolatore con la maestria con cui un musicista suona il suo strumento preferito. Per questo matematico il calcolatore non sarà mai un surrogato della immaginazione e della fantasia, ma potrà essere nello stesso tempo quello che per un musicista è un violino o un pianoforte.....”

Ennio De Giorgi “I giovani e la matematica”[1]

Al corso PON “Il gioco della matematica 2” hanno partecipato 20 studenti provenienti dalle classi seconde delle sezioni C, D, G, H del Liceo Scientifico “G.B. Scorza”. Ho realizzato un modulo di 20 ore in qualità di docente esperto, supportata dalla docente tutor prof.ssa Teresa Colonnese. Il tempo necessario per realizzare le attività qui descritte è stato di circa 8 ore. I ragazzi hanno lavorato in piccoli gruppi di 2-3 elementi ciascuno col foglio elettronico, con strumenti da disegno, con i software di geometria dinamica Cabri II Plus e GeoGebra. Alcuni studenti presentavano carenze di base, altri, pur avendo una certa manualità nei calcoli, evidenziavano difficoltà di ordine logico-deduttivo e discontinuità nell’attenzione (talvolta venivano sorpresi mentre inviavano messaggi tramite cellulare e mentre aggiornavano il loro profilo su facebook). Con le attività realizzate, oltre a esercitazioni di recupero su equazioni e radicali, ho

tentato di potenziare la motivazione e di mostrare l'importanza di imparare a usare tecniche e procedure di calcolo in modo consapevole. Ho cercato di far superare la visione settoriale tra le diverse branche della matematica, in particolare quella tra algebra e geometria e ho fornito spunti per sviluppi interdisciplinari tra matematica, storia dell'arte, storia e filosofia. Il lavoro ipermediale realizzato col software gratuito eXelearning è stato pubblicato sul sito della relativa comunità italiana ed è liberamente scaricabile dal link [6] riportato in sitografia.

Le attività per gli studenti

Come stimolo iniziale, per un'attenta riflessione sul teorema di Pitagora già studiato a lezione dagli studenti, ho proposto alcune attività presenti ne "Il teorema di Pitagora tra leggenda e storia", del piano nazionale m@t.abel (di cui sono tutor di II generazione), facente parte del volume *Matematica 2003. La matematica per il cittadino* (si vedano i link [2], [3]). In particolare ho voluto proporre ai ragazzi la dimostrazione senza parole, consegnando a ciascuno la stampa dell'immagine seguente:

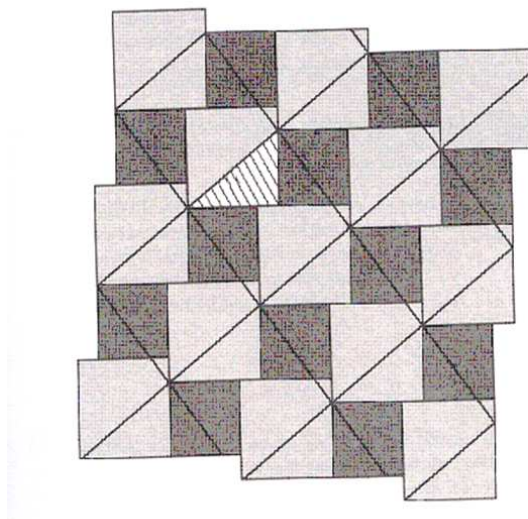


Figura 1

L'insolita consegna ha creato qualche perplessità iniziale, poi confrontandosi e discutendo nei gruppi, gli studenti hanno incominciato a osservare attentamente la figura e a individuare un opportuno triangolo rettangolo, le parti componenti i quadrati costruiti sui cateti e il quadrato costruito sull'ipotenusa. Alcuni hanno colorato le diverse aree congruenti, componendo figure equiestese. Altri le hanno numerate, riuscendo a ricomporre, come in un puzzle, figure che descrivono il teorema di Pitagora anche se, alle domande dell'insegnante, pur ricordando l'enunciato del teorema, argomentavano con difficoltà, perché abituati all'uso standard di lettere e formule. Alcuni studenti non sono riusciti ad avviare autonomamente un procedimento risolutivo adeguato e sono stati guidati dall'insegnante.

In seguito ho proposto altre dimostrazioni sul teorema di Pitagora, realizzate con un software di geometria dinamica con cui non tutti gli studenti avevano dimestichezza. Le costruzioni sono state realizzate attraverso discussioni guidate; grazie anche a sistematiche e frequenti domande, richiamavo continuamente nozioni teoriche e, se necessario, fornivo chiarimenti, ma senza dare subito la risposta, attendendo il tempo necessario affinché qualche studente provasse a rispondere. Discussioni collettive orchestrate dall'insegnante e gruppi di lavoro autonomi si sono alternati durante tutta l'esperienza. Gli studenti hanno partecipato con entusiasmo e quasi sempre attivamente, anche se, talvolta, sono emersi momenti di deconcentrazione e disattenzione che hanno comportato alcuni problemi di comprensione da parte di alcuni. Come già detto, ritengo che la causa più probabile di questi momenti di distrazione sia dovuta essenzialmente all'abitudine che gli studenti hanno di comunicare in modalità sincrone e reticolari, non sempre possibili nelle fasi del lavoro in classe. Per questi motivi, talvolta è stato necessario soffermarsi e richiamare l'attenzione sui punti essenziali, porre quesiti e verificare l'effettiva comprensione. Il gruppo seppur vivace, non ha creato problemi di carattere disciplinare, anche quando ha manifestato momenti di stanchezza dovuti al fatto che i lavori venivano proposti durante le prime ore pomeridiane.

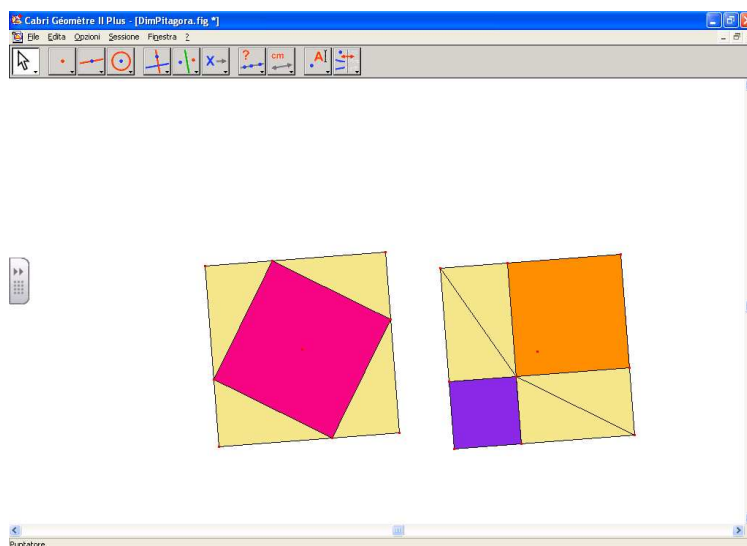


Figura 2

Ho anche fatto realizzare un semplice modellino con la carta del “Teorema della bustina” (come da figura 3), per far comprendere agli studenti che il teorema di Pitagora è valido anche se le figure costruite sui cateti e sull’ipotenusa non sono quadrati, ma figure simili tra loro. Manipolando il modellino, li ho invitati a enunciare e dimostrare il teorema; in questa occasione ho notato un progressivo miglioramento. Successivamente gli studenti hanno realizzato un file in ambiente GeoGebra di cui la figura 3 illustra le principali caratteristiche. La costruzione è stata occasione di discussione e condivisione dei contenuti teorici di geometria, dalla costruzione di un triangolo rettangolo, alla simmetria assiale, al teorema di Pitagora. In questo caso, ho potuto constatare che la maggior parte degli studenti incontra difficoltà in matematica, poiché nell’insegnamento curricolare vengono impartite nozioni astratte da utilizzare nella risoluzione di

esercizi e problemi spesso abbastanza ripetitivi, “poco spendibili” nella quotidianità. Al contrario il loro stile di apprendimento necessita di partire dalle applicazioni pratiche e da attività esperienziali che diano un senso alle conoscenze astratte man mano acquisite. La sistematizzazione richiede inoltre tempi diversi da persona a persona e spesso non si coniuga con i moduli orari scolastici.

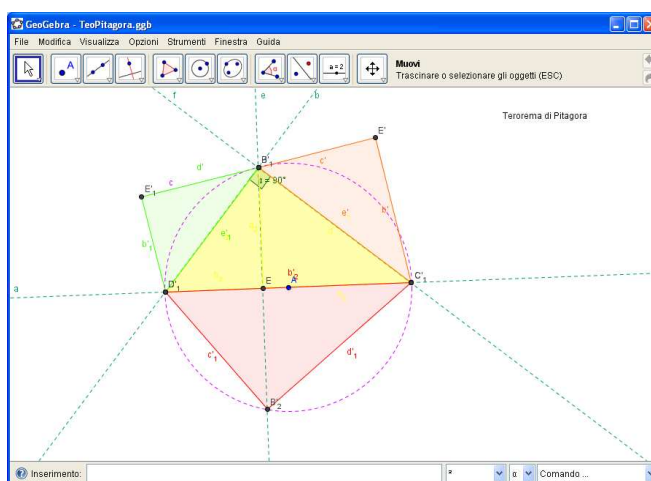


Figura 3

Ho poi mostrato col videoproiettore la figura 4, per verificare l’effettiva comprensione dei concetti introdotti e ho chiesto loro che cosa rappresentasse quell’immagine. Al primo impatto tutti hanno detto di vedere una farfalla realizzata con Cabri II Plus; ho chiesto loro di osservare meglio, ho modificato un pò la figura e ho ingrandito il triangolo centrale; gli studenti, inizialmente, non riuscivano a cogliere il significato geometrico della figura. Quando ho mostrato che il triangolo era inscritto in una semicirconferenza, si sono resi conto che si trattava di un triangolo rettangolo e che le figure che apparivano

come ali e testa erano simili tra loro; quindi si trattava ancora del teorema di Pitagora in una forma analoga al teorema della bustina.

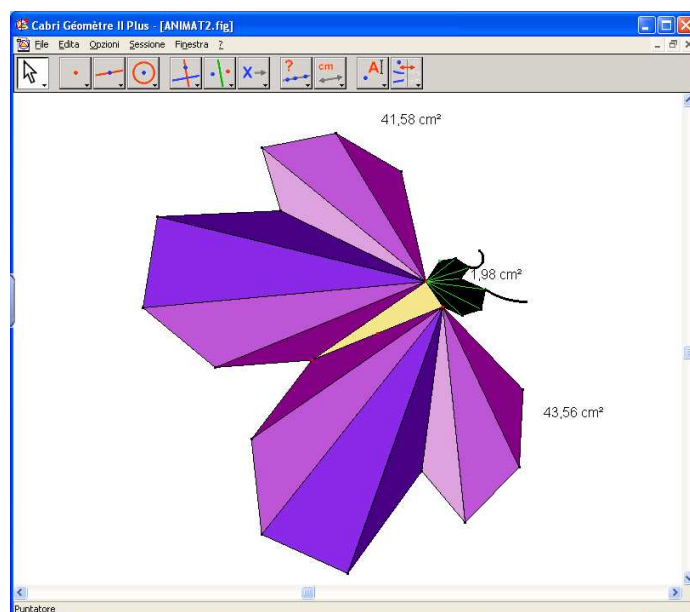


Figura 4

Per collegare l'attività svolta con l'algebra e, in particolare, con i numeri irrazionali e con lo studio sui radicali aritmetici, ho riproposto un'attività già sperimentata e descritta in un articolo (vedi Marincola, 2010), di cui riporto il problema iniziale che, come dice il titolo, non è altro che una rivisitazione del problema posto nel Menone di Platone:

Lucia ha un tavolino quadrato in salotto. Quando ha degli ospiti, la superficie è troppo piccola per poggiarvi sopra dei vassoi e lo spazio disponibile nella stanza è piuttosto limitato. Dopo aver misurato il

lato del tavolino e la superficie libera della stanza, fa delle costruzioni con riga e compasso per vedere quanto può essere esteso il nuovo tavolo. Si rende conto di poter sostituire il suo tavolino con uno, di forma quadrata, ma di superficie doppia, quindi, si rivolge a un falegname perchè glielo costruisca.

Risolvi il problema sia dal punto di vista algebrico che geometrico; puoi utilizzare sia strumenti da disegno che software di geometria dinamica.

Anche in questo caso sono emerse difficoltà nel riconoscere che il lato del tavolino di area doppia doveva avere la misura del lato uguale alla lunghezza della diagonale del tavolo di partenza. Da qui, è seguita una discussione sulle grandezze incommensurabili, in particolare su $\sqrt{2}$ e sulla scuola pitagorica, che ha suscitato interesse negli allievi. Abbiamo realizzato anche costruzioni con software di geometria dinamica analoghe a quelle riportate nell'articolo citato e successivamente abbiamo calcolato alcune cifre di π col metodo di esaurimento di Archimede mediante foglio elettronico.

A conclusione dell'attività ho richiesto di fare ricerche in rete su Pitagora e la sua scuola e ho spiegato loro come costruire un'immagine interattiva col software gratuito Reader 2D (liberamente scaricabile dal link [4]). Abbiamo utilizzato un'immagine virtuale del capolavoro di Raffaello Sanzio "La scuola di Atene". Su questa i ragazzi hanno imparato facilmente (si veda il tutorial [5]) come creare link a un video You Tube di storia dell'arte, a una pagina web sull'artista, a una pagina web sui personaggi presenti nell'opera e a una pagina dedicata a Pitagora. La selezione delle risorse è stata guidata in modo da reperire fonti significative dal punto di vista dei contenuti (cfr. [7], [8]) sulla cui lettura ci si è soffermati per creare un raccordo tra matematica, storia dell'arte, filosofia e storia.

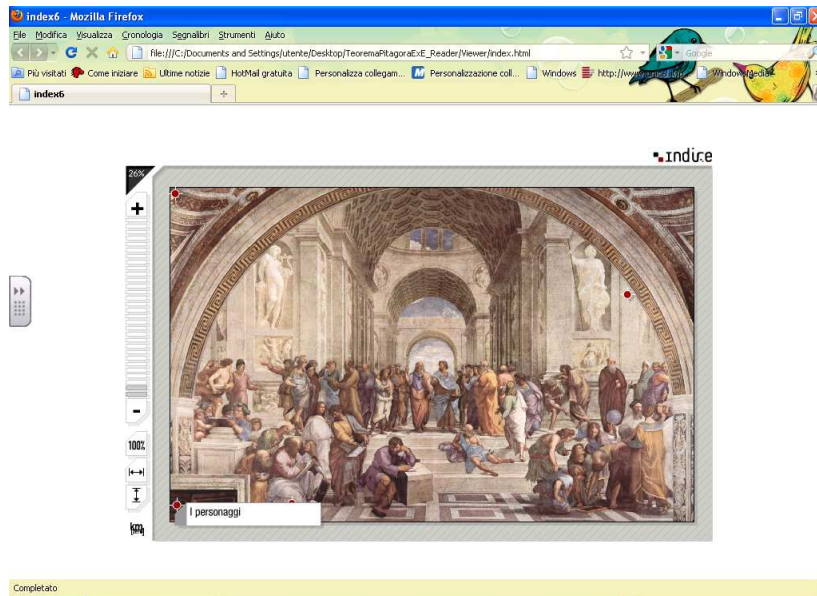


Figura 5

Conclusioni e possibili sviluppi futuri

In questo lavoro sono state presentate attività di tipo laboratoriale che, attraverso l'osservazione, la manipolazione di modelli reali e la costruzione di una serie di file con software di geometria dinamica, ha condotto gli studenti a uno studio meditato e attento sul teorema di Pitagora. Tali costruzioni hanno aiutato i ragazzi a comprendere meglio le proprietà degli enti geometrici in quanto l'uso delle tecnologie si rivela più consono ai loro mezzi espressivi. La realizzazione dell'immagine interattiva ha consentito loro di completare in breve tempo un prodotto ipermediale (utilizzando materiali e software gratuiti), in cui hanno raccolto le conoscenze

interdisciplinari acquisite che potranno poi essere ampliare nel prosieguo degli studi. Spesso le attività realizzate da esperti esterni nell'ambito di progetti extracurricolari non vengono condivise tra colleghi che ne ignorano i contenuti. Ho pubblicato in rete il lavoro svolto (cfr. [6]) affinché fosse fruibile anche in seguito dagli studenti e per offrire la possibilità ai docenti curricolari di utilizzarlo, modificarlo e svilupparlo.

Per visualizzare correttamente il file occorre estrarre tutto il contenuto dalla cartella zippata e lanciare index.html.

I punti sull'immagine sono link, ma se il PC non è già configurato, si deve "aggiungere" il file index6.swf tra gli elementi di Flash, bisogna selezionare il percorso fino alla cartella e al file per far funzionare il tutto. Dopo la configurazione, bisogna chiudere il browser, e cliccare di nuovo su index.html. La prima volta, se l'immagine appare troppo ingrandita, si deve ridurre lo zoom col segno "-" (lasciare solo 2 tacche).

Ho voluto evidenziare quanto una didattica basata sul learning by doing, possa essere significativa per gli studenti. Essa, infatti, può creare le condizioni favorevoli per un apprendimento che mira allo sviluppo del pensiero matematico utilizzando, consapevolmente, strumenti diversi, tra cui quelli di calcolo automatico, ed essere al tempo stesso coinvolgente ed entusiasmante.

Bibliografia

- S. Bagnara (2010), *Lavoro e sistemi formativi nella società della conoscenza*, Programma Education FGA working paper N. 31.
V. Campione (2010), *Tecnologie, ambienti di apprendimento*,

- qualità del sistema di istruzione*, Programma Education FGA working paper N. 31.
- L. Cateni, R. Fortini, C. Bernardi (1990) *Nuova Geometria*, Le Monnier.
- B. D'Amore (1999), *Elementi di didattica della matematica*, Pitagora, Bologna.
- B. D'Amore (2009), *Il ruolo dell'epistemologia dell'insegnante nelle pratiche d'insegnamento*, L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate, vol. 32 B, n.2.
- F. Ferrara, P. Laiolo, D. Paola & K. Savioli (2010), *Movimento visualizzazione e costruzione di significato nella scuola secondaria di secondo grado*, L'insegnamento della matematica delle scienze integrate, v. 33B, n. 2, 139-170.
- P. Lazzarini , G. Sarnataro (2006) *Geometria*, ETAS.
- L. Lombardo Radice (1976), *Logica e interdisciplinarietà*, in *Introduzione alla logica*, Editori Riuniti, Roma.
- D. Paola (2005), *Esempi di didattica sensata*, L 'Educazione Matematica, V. 1, n. 1, 11 - 23.
- D. Paola (2004), *Software di geometria dinamica per un sensato approccio alla dimostrazione in geometria: un esempio di Laboratorio di matematica*, Progetto Alice, v. 5, n. 13, 103 - 121
- J. Piaget (1956), *Avviamento al calcolo*, la Nuova Italia, Firenze, 1956, p. 31.
- R. Marincola (2010), *Una rivisitazione del problema della duplicazione del quadrato*, L'Insegnamento della matematica e delle scienze integrate, Vol. 33 B, n. 1, pp. 69-86.
- D. Paola (2010), *Cabri Géomètre: una risorsa per un insegnamento apprendimento "sensato" della matematica* in "Seminari di geometria dinamica" a cura di Giuseppe Accascina ed Enrico Rogora, Edizioni Nuova Cultura, Roma.
- V. Villani (2006) *Cominciamo dal punto*, Pitagora, Bologna.

Sitografia

[1] De Giorgi E.: *I giovani e la matematica*

http://www.matematicamente.it/il_magazine/numero_6%3a_maggio_2008/il_numero_6_%28maggio_2008%29_completo_di_matematicamente.it_magazine_200806063431/

[2] L'attività per studenti della scuola secondaria di secondo grado "Il Teorema di Pitagora tra leggenda e storia", tratta da Matematica 2003 è reperibile al link:

<http://didatticait.altervista.org/Didattica/matematica/formulario/triangolo/Il%20teorema%20di%20Pitagora%20tra%20leggenda%20e%20storia.pdf>

[3] *Matematica 2003. La matematica per il cittadino. Attività didattiche e prove di verifica per un nuovo curriculum di matematica. Ciclo secondario.*

<http://umi.dm.unibo.it/italiano/Matematica2003/matematica2003.html>

[4] La cartella compressa contenente il software Reader 2D si può scaricare gratuitamente dal link:

<http://www.limbelli.altervista.org/reader-2d.html>

[5] Un tutorial del software Reader 2D:

<http://www.exelearning.it/creare-learning-object/realizza-contenuti-didattici-interattivi/guida-a-reader2d.html>

[6] Il lavoro ipermediale qui descritto è reperibile al seguente link:

http://www.exelearning.it/download/doc_details/38-il-teorema-di-pitagora.html

[7] S. Bagnara (2009), *Tecnologie e abilità cognitive. Non solo cattive maestre*. Treccani, Scuola, dossier 2009 le forme della comunicazione. <http://www.treccani.it/Portale/sito/scuola/dossier/2009/networking/bagnara.html>

[8] S. Papert (1998), *Collegatevi alla rete, non è in classe che si impara*. Teléma n. 12, Computer scuola e sapere

<http://www.scribd.com/doc/11725142/Seymour-Papert-Non-e-in-classe-che-si-impara>